Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Laskuharjoitus 5
Ryhmä 1: To 6.12., Itsenäisyyspäivä - osallistu ryhmän 2 tai 3 tapaamiseen
Ryhmä 2: Ti 4.12., klo 14:15–16:00 (Exactum, B321)
Ryhmä 3: Ke 5.12., klo 14:15–16:00 (Exactum, B322)

---

1. Määritä funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1 - x_2 + x_3$$

ääriarvot joukossa

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

2. Tarkastellaan välin $I = [-1, 1]$ polkua $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \big(t, |t|\big).$$

(a) Hahmottele kuva polun jäljestä $\gamma(I)$.

(b) Osoita, että polku γ on paloittain sileä murtoviivapolku, mutta ei C^1-polku.

(c) Laske polun γ pituus.

3. Olkoon polku

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2\,, \quad \text{missä } I = [-1, 1]\,,$$

määritelty kuten tehtävässä 2.

(a) Anna esimerkki C^1-Jordan-polusta

$$\eta : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$$

siten, että $\eta(I) = \gamma(I)$.

(b) Laske (a)-kohdassa antamasi polun η derivaatta pisteessä $t_0 := \eta^{-1}(0)$. Miten pystyt päättelemään derivaatan η' arvon pisteessä t_0 ilman, että sinun varsinaisesti tarvitsee laskea sitä?

(c) Laske myös antamasi polun η pituus.

4. Olkoon

$$\nu : \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \nu(t) = \sqrt{2}\,\big(\cos t, \sin t\big)$$

ja oletetaan, että $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ on määritelty kuten tehtävässä 2.

(a) Hahmottele kuva polun $\nu \vee \overleftarrow{\gamma}$ jäljestä.

(b) Määritä yhdistetyn polun $\rho := \nu \vee \overleftarrow{\gamma}$ lauseke.

(c) Onko polku $\nu \vee \overleftarrow{\gamma}$ umpinainen? Entä onko se Jordan-polku?

(d) Laske polun $\nu \vee \overleftarrow{\gamma}$ pituus.

5. Osoita, että C^1-funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

graafi $\mathcal{G}_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on sileä Jordan-käyrä. Johda C^1-funktion f graafin $\mathcal{G}_f$ käyränpituudelle ℓ esitys

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \|f'(t)\|^2}\, dt\,.$$

6. Laske tehtävän 5 avulla graafin $\mathcal{G}_f \subset \mathbb{R}^3$ pituus funktiolle $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = (a + \cos 2t, b + \sin 2t)\,,$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$.