Johdatus logiikkaan II

Harjoitus 6

1. Näytä, että $\vdash \exists x_0 \forall x_1 R(F(x_0), x_1) \to \exists x_0 R(x_0, F(x_0))$.

2. Näytä, että $\{P(c_0)\} \vdash \forall x_0(\neg P(x_0) \to \neg c_0 = x_0)$. Muista, että todistuksessa saa käyttää identiteettiaksioomeja.

3. Olkoon $M = (\mathbb{N}, F^M, G^M, c_0^M, c_1^M)$, missä $F^M(n) = n+3$, $G^M(n,m) = n+m+1$ $c_0^M = 3$ ja $c_1^M = 4$. Olkoon s mallin M tulkintafunktio jolla $s(x_n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Määritä $t^M < s >$ kun

(a) $t = F(x_2)$,
(b) $t = G(F(x_3), c_1)$,
(c) $t = F(G(x_2, F(c_0)))$,
(d) $t = G(G(x_1, c_1), F(c_0))$.

4. Olkoon $\mathbf{Z}$ kokonaislukujen joukko ja $M = (\mathbf{Z}, F^M, c_0^M, c_1^M)$, missä $F^M(n,m) = n+m$, $c_0^M = 0$ ja $c_1^M = 1$.

(a) Mitkä mallin M alkiot ovat vakiotermien tulkintoja? (Termi on vakiotermi jos siinä ei esiinny muuttujia.)

(b) Mille mallin M alkioille n pätee, että $\{n\}$ on määriteltävä?

Kaikilla $n, m \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, olkoon $A_n = \{x \in \mathbb{N} |\ x < n\}$, $R_n = \{(a,b) \in A_n \times A_n |\ b = a+1\} \cup \{(n-1, 0)\}$, $M_n = (A_n, R^{M_n})$, missä $R^{M_n} = R_n$ ja $M_{n,m} = (A_n \times A_m, R^{M_{n,m}})$, missä $R^{M_{n,m}} = \{((a,b),(c,d)) \in (A_n \times A_m)^2 |\ (a,c) \in R_n, (b,d) \in R_m\}$.

5. Ovatko M_6 ja $M_{3,2}$ isomorfiset?

6. Ovatko M_4 ja $M_{2,2}$ isomorfiset?