HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan II, syksy 2018
Harjoitus 4 – Ratkaisuehdotukset

1. Mitkä muuttujat esiintyvät vapaina kaavassa
$$\forall x_2(\forall x_0 R_0(x_1, x_2) \to (\exists x_3 R_0(x_3, x_0) \wedge R_0(x_3, x_0)))?$$

   Ratkaisu: Muuttujan x_i esiintymä on vapaa, jos se ei esiinny kvanttorin $\forall x_i$ tai $\exists x_i$ vaikutusalueella. Tehtävän kaavassa esiintyvät muuttujat x_0, x_1, x_2 ja x_3. Analysoidaan näiden vapautta.

   - Muuttujan x_2 kaikki esiintymät ovat kvanttorin $\forall x_2$ vaikutusalueella, joten yksikään niistä ei ole vapaa.
   - Muuttujan x_1 ainoa esiintymä on kvanttoreiden $\forall x_2$ ja $\forall x_0$ vaikutusalueella, mutta koska kumpikaan näistä ei sido sitä, se on vapaa.
   - Kumpikin muuttujan x_0 esiintymistä on kvanttorin $\forall x_2$ vaikutusalueella, ja lisäksi ensimmäinen esiintymä on kvanttorin $\exists x_3$ vaikutusalueella. Kumpikaan kvanttoreista ei siis sido kumpaakaan esiintymää, joten x_0 on vapaa.
   - Muuttujan x_3 esiintymät ovat samojen kvanttoreiden vaikutusalueella kuin muuttujan x_0 esiintymät. Näistä $\forall x_2$ ei sido kumpaakaan esiintymää, mutta $\exists x_3$ sitoo muuttujan x_3 ensimmäisen esiintymän. Toinen esiintymä on kuitenkin vapaa.

   Siis muuttujat x_0, x_1 ja x_3 esiintyvät kaavassa vapaina (tosin x_3 esiintyy myös sidottuna).

2. Minkä joukon määrittelee kaava $P_0(x_0) \to \neg P_1(x_0)$ mallissa
$$M = (\{0, 1, 2, 3\}, P_0^M, P_1^M),$$
   kun $P_0^M = \{0, 1\}$ ja $P_1^M = \{1, 2\}$?

   Ratkaisu: Tarskin totuusmääritelmän nojalla millä tahansa tulkintafunktiolla s pätee
$$\begin{aligned}
&M \models_s P_0(x_0) \to \neg P_1(x_0),\\
&\quad \text{joss } M \not\models_s P_0(x_0) \text{ tai } M \not\models_s P_1(x_0),\\
&\quad \text{joss } s(x_0) \notin P_0^M \text{ tai } s(x_0) \notin P_1^M,\\
&\quad \text{joss } s(x_0) \in (P_0^M)^c \cup (P_1^M)^c,\\
&\quad \text{joss } s(x_0) \in (P_0^M \cap P_1^M)^c,
\end{aligned}$$

missä $(P_i^M)^c := M \setminus P_i^M$. Siis kaava määrittelee joukon

$$(P_0^M \cap P_1^M)^c = (\{0,1\} \cap \{1,2\})^c = \{1\}^c = \{0,2,3\}.$$[1]

3. Olkoon $M = (\{0,1,2,3\}, R_0^M, c_0^M)$, missä

$$R_0^M = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$$

ja $c_0^M = 2$. Minkä joukon kaava $\forall x_1(R_0(c_0,x_1) \to R_0(x_0,x_1))$ määrittelee?

Ratkaisu: Tarskin totuusmääritelmän nojalla jokaisella tulkintafunktiolla s pätee

$M \models_s \forall x_1(R_0(c_0,x_1) \to R_0(x_0,x_1))$
joss $M \models_{s(a/x_1)} R_0(c_0,x_1) \to R_0(x_0,x_1)$ kaikilla $a \in \mathrm{dom}(M)$,
joss $M \not\models_{s(a/x_1)} R_0(c_0,x_1)$ tai $M \models_{s(a/x_1)} R_0(x_0,x_1)$ kaikilla $a \in \mathrm{dom}(M)$,
joss $(c_0^M, a) \notin R_0^M$ tai $(s(x_0),a) \in R_0^M$ kaikilla $a \in \mathrm{dom}(M)$,
joss $(2,a) \notin R_0^M$ tai $(s(x_0),a) \in R_0^M$ kaikilla $a \in \mathrm{dom}(M)$.

Esitämme kaksi tapaa, kuinka edetä tästä.

Tapa 1: Siis kaava määrittelee sellaisen joukon $X \subseteq \mathrm{dom}(M)$, että $b \in X$, jos ja vain jos kaikilla $a \in \mathrm{dom}(M)$ pätee joko $(2,a) \notin R_0^M$ tai $(b,a) \in R_0^M$. Tutkitaan jokaisesta mallin alkiosta yksitellen, kuuluuko se joukkoon X.

- $0 \in X$, sillä ehto $(0,a) \in R_0^M$ jää toteutumatta vain, jos $a = 0$. Kuitenkin tällöin toteutuu ehto $(2,a) \notin R_0^M$, sillä pari $(2,0)$ ei ole relaatiossa.
- $1 \notin X$, sillä $(2,1) \in R_0^M$ ja $(1,1) \notin R_0^M$ (eli löytyi sellainen a, että kumpikaan ehdoista ei toteudu).
- $2 \in X$, sillä totta kai jokaisella $a \in \mathrm{dom}(M)$ pätee joko $(2,a) \in R_0^M$ tai $(2,a) \notin R_0^M$.
- $3 \notin X$, sillä $(2,1) \in R_0^M$ ja $(3,1) \notin R_0^M$.

[1] Nähdään, että kaava $P_0(x_0) \to \neg P_1(x_0)$ on loogisesti ekvivalentti kaavan $\neg(P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))$ kanssa (jos tämä ei ole selvää, todista se käyttämällä totuusmääritelmää). Voidaan huomata, että ainakin tapauksessa, jossa kaavassa esiintyy vain yksi vapaa muuttuja ja relaatiosymbolit ovat yksipaikkaisia, konnektiivit $\wedge$ ja $\neg$ vastaavat suoraan joukkojen leikkausta ja komplementtia.

Siis $X = \{0, 2\}$.

Tapa 2: Huomataan, että ehto

$$(2, a) \notin R_0^M \text{ tai } (s(x_0), a) \in R_0^M \text{ kaikilla } a \in \mathrm{dom}(M)$$

on yhtäpitävä ehdon

$$\text{kaikilla } a \in \mathrm{dom}(M) \text{ jos } (2, a) \in R_0^M, \text{ niin } (s(x_0), a) \in R_0^M$$

kanssa. Nähdään, että sellaiset luvut a, joilla pätee $(2, a) \in R_0^M$, ovat $a = 1$ ja $a = 3$. Siten kaava määrittelee sellaisen joukon X, että $b \in X$, jos ja vain jos $(b, 1) \in R_0^M$ ja $(b, 3) \in R_0^M$. Katsomalla kaikki alkiot läpi samalla tavalla kuin tavassa 1 (joskin hieman vähemmällä vaivalla) nähdään, että vain luvut $b = 0$ ja $b = 2$ toteuttavat ehdon. Siis $X = \{0, 2\}$.

4. Olkoon X joukon $\{0, 1, 2\}$ osajoukkojen perhe (eli potenssijoukko) ja $M = (X, R_0^M)$, missä $R_0^M = \{(a, b) \in X^2 \mid a \subseteq b\}$. Näytä, että joukko $\{\emptyset, \{0, 1, 2\}\}$ on määriteltävä mallissa M.

   Ratkaisu: Relaatio R_0^M on joukkojen sisältyvyysrelaatio, joka on osittaisjärjestys. Tyhjä joukko on osittaisjärjestyksen pienin alkio ja joukko $\{0, 1, 2\}$ sen suurin alkio. Näiden kaksion voi siis määritellä ilmaisemalla juuri tämän seikan.

   Olkoon A siis kaava

$$\forall x_1 R_0(x_1, x_0) \vee \forall x_1 R_0(x_0, x_1).$$

   Ensimmäinen disjunkti määrittelee alkion $\{0, 1, 2\}$ sanomalla, että x_0:n tulkinta on suurin alkio, ja toinen disjunkti määrittelee alkion $\emptyset$ sanomalla, että x_0:n tulkinta on pienin alkio. Näin ollen jos kaava A toteutuu tulkintafunktiolla s, niin $s(x_0)$ on joko $\emptyset$ tai koko joukko $\{0, 1, 2\}$, ja toisaalta jos $s(x_0) = \emptyset$, toteutuu ensimmäinen disjunkti, ja jos $s(x_0) = \{0, 1, 2\}$, toteutuu toinen disjunkti. Näytetään tämä vielä täsmällisesti: kaikilla tulkintafunktioilla s

pätee

$$
\begin{aligned}
M \models_s A \text{ joss } & M \models_s \forall x_1 R_0(x_1, x_0) \text{ tai } M \models_s \forall x_1 R_0(x_0, x_1) \\
& \text{joss kaikilla } a \in \mathrm{dom}(M) M \models_{s(a/x_1)} R_0(x_1, x_0) \text{ tai} \\
& \quad\quad \text{kaikilla } a \in \mathrm{dom}(M) M \models_{s(a/x_1)} R_0(x_0, x_1) \\
& \text{joss } (a, s(x_0)) \in R_0^M \text{ kaikilla } a \in \mathrm{dom}(M) \text{ tai} \\
& \quad\quad (s(x_0), a) \in R_0^M \text{ kaikilla } a \in \mathrm{dom}(M) \\
& \text{joss } a \subseteq s(x_0) \text{ kaikilla } a \in \mathrm{dom}(M) \text{ tai} \\
& \quad\quad s(x_0) \subseteq a \text{ kaikilla } a \in \mathrm{dom}(M) \\
& \text{joss } s(x_0) = \{0, 1, 2\} \text{ tai} s(x_0) = \emptyset.
\end{aligned}
$$

Siis kaava A määrittelee joukon $\{\emptyset, \{0, 1, 2\}\}$.

5. Mikä kaava $A(x_1/x_0)$ on kun

   (a) $A = \forall x_2 \exists x_0 (R_0(x_0, x_2) \to \exists x_2 R_0(x_1, x_0))$,

   (b) $A = \forall x_2 (\exists x_0 R_0(x_0, x_2) \to \exists x_2 R_0(x_1, x_0))$?

Ratkaisu: Kaava $A(x_1/x_0)$ on se, joka saadaan korvaamalla kaavasta A kaikki muuttujan x_0 vapaat esiintymät muuttujalla x_1, kunhan muuttuja x_1 on vapaa muuttujalle x_0 kaavassa A. Jos x_1 tulisi sidotuksi, notaatiota ei luentomonisteen mukaan ole lupa käyttää.

(a) Muuttujalla x_0 ei ole vapaita esiintymiä, sillä molemmat esiintymät ovat kvanttorin $\exists x_0$ vaikutusalueella. Siten $A(x_1/x_0) = A$.

(b) Muuttujan x_0 ainoa vapaa esiintymä on implikaation takajäsenessä. Koska kaavassa A ei esiinnyt kvanttoreita, jotka voisivat sitoa muuttujan x_1, muuttujan sijoitus on sallittu ja

$$A(x_1/x_0) = \forall x_2 (\exists x_0 R_0(x_0, x_2) \to \exists x_2 R_0(x_1, x_1)).$$

6. Onko x_0 vapaa muuttujalle x_1 kaavassa A kun

   (a) $A = \forall x_2 \exists x_0 (R_0(x_0, x_2) \to \exists x_2 R_0(x_1, x_0))$,

   (b) $A = \forall x_2 (\exists x_0 R_0(x_0, x_2) \to \exists x_2 R_0(x_1, x_0))$?

Ratkaisu:

(a) Muuttujan x_1 ainoa vapaa esiintymä on implikaation takajäsenessä. Se on kvanttorin $\exists x_0$ vaikutusalueella, joten jos termi x_0 sijoitettaisiin sen tilalle, tämä tulisi sidotuksi. Siis x_0 ei ole vapaa muuttujalle x_1 kaavassa A.

(b) Nyt muuttujan x_1 vapaa esiintymä ei ole kvanttorin $\exists x_0$ (tai minkään muunkaan muuttujan x_0 sitovan kvanttorin) vaikutusalueella, joten x_0 on vapaa muuttujalle x_1 kaavassa A.