Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Övning 7

Notera: kursprovet arrangeras torsdag 20.12. kl 9.15-11.45 i C321. Provområdet är kapitel 7-13 i boken.

Tilläggspoäng: varje vecka ger 2–3 lösta uppgifter +1/2 p, och 4–6 lösta uppgifter ger +1 p. Påminnelseuppgifterna räknas inte in.

Påminnelseuppgift 1. Försäkra dig om att du kan visa att unionen av två kompakta delmängder i X är kompakt.

Påminnelseuppgift 2. Ge ett exempel på en delmängd $A \subset \mathbb{Q}$ som är sluten och begränsad men inte kompakt (dvs. Sats 13.14 gäller inte för $\mathbb{Q}$).

Påminnelseuppgift 3. Visa att mängderna E och F i $\mathbb{R}^2$ inte är sammanhängande, då $E = S((1,0), \frac{1}{2}) \cup S((-1,0), \frac{1}{2})$ och $F = B((1,0), 1) \cup B((-1,0), 1)$.

Egentliga uppgifter:

Uppgift 1. Visa att om $\emptyset \neq A \subset X$ och A är kompakt så finns det sådana $a, b \in A$ att $d(a,b) = d(A)$. (Om du använder kompakthet av produktrummet, visa det först.)

Uppgift 2. Är följande mängder $A_i \subset \mathbb{R}^2$ (a) kompakta, (b) fullständiga:

$$A_1 = \{(x,y) \,:\, x^2 + 3y^2 \leq 4\},$$
$$A_1 = \{(x,y) \,:\, xy = 1\},$$
$$A_1 = \{(x,y) \,:\, x^2 + 3y^2 < 4\}.$$

Uppgift 3. Utgå från två metriska rum (X, d) och (Y, d'), varav X är kompakt. Betrakta de kontinuerliga funktionerna $f_n : X \to Y$ och antag att de konvergerar likformigt mot funktionen $f : X \to Y$. Vi antar att varje f_n uppnår värdet $y_0 \in Y$. Visa att också f får värdet y_0.

Uppgift 4. Antag att X är kompakt och (x_n) är en följd i X med exakt ett anhopningsvärde a. Visa att $x_n \to a$.

Uppgift 5. Antag att X är ett kompakt metriskt rum och (f_n) är en växande följd kontinuerliga funktioner $f_n : X \to \mathbb{R}$ som konvergerar punktvis mot den kontinuerliga funktionen $g : X \to \mathbb{R}$. Visa att konvergensen är likformig i X. Tips: Bilda för varje

$\varepsilon > 0$ mängden $A_n = \{x \in X : f_n(x) \leq g(x) - \varepsilon\}$ och använd påminnelseuppgift 4 och uppgift 4 från förra veckan.

Uppgift 6. Antag att X är ett sammanhängande metriskt rum, D en mängd och $f : X \to D$ en avbildning så att varje $x \in X$ har en omgivning i vilken f är konstant. Visa att f är konstant.