Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Laskuharjoitus 6
Ryhmä 1: To 13.12., klo 14:15–16:00 (Exactum, C321)
Ryhmä 2: Ti 11.12., klo 14:15–16:00 (Exactum, B321)
Ryhmä 3: Ke 12.12., klo 14:15–16:00 (Exactum, B322)

---

1. Osoita, että sileille Jordan-poluille

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad \eta : J \to \mathbb{R}^n$$

on voimassa

$$\gamma(I) = \eta(J) \quad \text{jos ja vain jos} \quad \gamma \sim \eta.$$

(Vinkki: toinen suunta seuraa määritelmästä ja toiseen suuntaan käytä apunasi jatkuvaa bijektiota $u := \gamma^{-1} \circ \eta : J \to I$)

2. Oletetaan, että joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ jatkuvasti derivoituville poluille

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n \quad \text{ja} \quad \eta : J \to \mathbb{R}^n$$

on voimassa $\gamma \sim \eta$. Oletetaan, että funktiolle

$$f : A \to \mathbb{R}$$

integraali $\int_\gamma f\, ds$ on olemassa. Osoita, että tällöin myös $\int_\eta f\, ds$ on olemassa ja

$$\int_\eta f\, ds = \int_\gamma f\, ds\,.$$

(Vinkki: sovella kysymyspaperin kääntöpuolelta löytyvää muuttujanvaihtokaavaa Riemann-integroituvaan funktioon $g(t) = f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|$)

3. Todista luennolla 10 esitetetyn seurauksen 20.5 kohdat (1) ja (2).

4. Tarkastellaan polkuja

$$\begin{aligned} \gamma &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, && \gamma(t) = (0,0,t) \\ \eta &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, && \eta(t) = (t,0,1) \text{ ja} \\ \nu &: [0,3\pi] \to \mathbb{R}^3, && \nu(t) = (\cos t, \sin t, 1). \end{aligned}$$

(a) Määritä yhdistetty polku

$$\gamma \vee \eta \vee \nu := (\gamma \vee \eta) \vee \nu.$$

(b) Piirrä kuva polun $\gamma \vee \eta \vee \nu$ jäljestä.

(c) Laske funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2$$

käyräintegraali polun $\gamma \vee \eta \vee \nu$ suhteen.

5. Oletetaan, että $0 < r < R$. Osoita, että tällöin *kalotin*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = R,\, x_3 > r\}$$

pinta-ala on

$$\mathrm{Ala}(E) = 2\pi R(R - r).$$

6. Laske funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^2}$$

pintaintegraali yli joukon A reunan ∂A, kun

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}.$$

(Vinkki: vastaukseksi tulee $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$)

Muuttujanvaihto: Olkoon $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva ja $u : [c,d] \to [a,b]$ jatkuvasti derivoituva funktio siten, että

$$u'(t) \neq 0 \quad \text{kaikilla } t.$$

Tällöin

$$\int_{u(c)}^{u(d)} g(t)\,dt = \int_c^d g(u(t))\,u'(t)\,dt.$$