HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan I, syksy 2018
Harjoitus 5 – Ratkaisuehdotukset

1. Näytä, että $\vdash \forall x_0 R(c_0, x_0) \to \exists x_0 R(x_0, x_0)$.

   Ratkaisu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x_0 R(c_0, x_0)]^1}{R(c_0, c_0)}\;\forall\text{ E, }\mathbf{h1}}{\exists x_0 R(x_0, x_0)}\;\exists\text{ T, }\mathbf{h2}}{\forall x_0 R(c_0, x_0) \to \exists x_0 R(x_0, x_0)}\;\to\text{ T, }1$$

   h1: termi c_0 on vapaa muuttujalle x_0 kaavassa $R(c_0, x_0)$
   h2: termi c_0 on vapaa muuttujalle x_0 kaavassa $R(x_0, x_0)$

2. Näytä, että $\exists x_0 A \to B \vdash \exists x_0(A \to B)$.

   Ratkaisu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x_0 A \to B \qquad \dfrac{[A]^1}{\exists x_0 A}\;\exists\text{ T, }\mathbf{h1}}{B}\;\to\text{ E}}{A \to B}\;\to\text{ T}}{\exists x_0(A \to B)}\;\exists\text{ T, }\mathbf{h2}$$

   h1: termi x_0 on (toki) vapaa muuttujalle x_0 kaavassa A
   h2: termi x_0 on (toki) vapaa muuttujalle x_0 kaavassa $A \to B$

3. Näytä, että $\vdash \forall x_0(A \vee \neg B) \to (\exists x_0 \neg A \to \exists x_0 \neg B)$.

   Ratkaisu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x_0 \neg A]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x_0 A \vee \neg B]^4}{A \vee \neg B}\;\forall\text{ E, }\mathbf{h1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [\neg A]^2}{A \wedge \neg A}\;\wedge\text{ T}}{\neg\neg\exists x_0 \neg B}\;\neg\text{ T}}{\exists x_0 \neg B}\;\neg\text{ E} \qquad \dfrac{[\neg B]^1}{\exists x_0 \neg B}\;\exists\text{ T, }\mathbf{h2}}{\exists x_0 \neg B}\;\vee\text{ E, }1}{\exists x_0 \neg B}\;\exists\text{ E, }2\text{, }\mathbf{h3}}{\exists x_0 \neg A \to \exists x_0 \neg B}\;\to\text{ T, }3}{\forall x_0(A \vee \neg B) \to (\exists x_0 \neg A \to \exists x_0 \neg B)}\;\to\text{ T, }4$$

h1: muuttuja x_0 on vapaa itselleen
h2: muuttuja x_0 on vapaa itselleen
h3: muuttuja x_0 on vapaana vain oletuksessa $\neg A$

4. Näytä, että $\vdash \neg\exists x_0 \neg A \to \forall x_0 A$.

   Ratkaisu:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg A]^1$}
\RightLabel{\scriptsize $\exists$ T, \textbf{h1}}
\UnaryInfC{$\exists x_0 \neg A$}
\AxiomC{$[\neg\exists x_0 \neg A]^2$}
\RightLabel{\scriptsize $\wedge$ T}
\BinaryInfC{$\exists x_0 \neg A \wedge \neg\exists x_0 \neg A$}
\RightLabel{\scriptsize $\neg$ T, 1}
\UnaryInfC{$\neg\neg A$}
\RightLabel{\scriptsize $\neg$ E}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{\scriptsize $\forall$ T, \textbf{h2}}
\UnaryInfC{$\forall x_0 A$}
\RightLabel{\scriptsize $\to$ T, 2}
\UnaryInfC{$\neg\exists x_0 \neg A \to \forall x_0 A$}
\end{prooftree}
$$

h1: muuttuja x_0 on vapaa itselleen
h2: muuttuja x_0 on vapaa itselleen

5. Näytä, että $\vdash \neg\exists x_0(R(x_0) \wedge \forall x_1(S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1)))$. Vihje: Oleta $\exists x_0(R(x_0) \wedge \forall x_1(S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1)))$ ja $S(x_0, x_0)$ ja päättele ristiriita kaksi kertaa.

   Ratkaisu: Merkitään lyhennyksen vuoksi

$$A = R(x_0) \wedge \forall x_1(S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1)).$$

Olkoon $\begin{array}{c} A \\ \mathcal{P} \\ S(x_0, x_0) \leftrightarrow \neg S(x_0, x_0) \end{array}$ seuraava päättely:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{A}
\RightLabel{\scriptsize $\wedge$ E}
\UnaryInfC{$\forall x_1(S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1))$}
\RightLabel{\scriptsize $\forall$ E, \textbf{h1}}
\UnaryInfC{$S(x_0, x_0) \leftrightarrow \neg S(x_0, x_0)$}
\end{prooftree}
$$

h1: termi x_0 on vapaa muuttujalle x_1 kaavassa $S(x_0, x_1) \leftrightarrow \neg S(x_1, x_1)$.

Olkoon $\begin{array}{c} A \\ \mathcal{Q} \\ \neg S(x_0, x_0) \end{array}$ alla oleva päättely.

$$\dfrac{\dfrac{[S(x_0,x_0)]^1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}A\\ \mathcal{P}\\ S(x_0,x_0)\leftrightarrow\neg S(x_0,x_0)\end{matrix} \qquad [S(x_0,x_0)]^1}{\neg S(x_0,x_0)}\ {\scriptstyle\leftrightarrow\,\mathrm{E}}}{S(x_0,x_0)\land\neg S(x_0,x_0)}\ {\scriptstyle\land\,\mathrm{T}}}{\neg S(x_0,x_0)}\ {\scriptstyle\neg\,\mathrm{T},\,1}$$

Olkoon B jokin kaava, jossa muuttuja x_0 ei esiinny vapaana, vaikka $R(x_1)$, ja olkoon $\begin{matrix}A\\ \mathcal{R}\\ B\land\neg B\end{matrix}$ alla oleva päättely.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}A\\ \mathcal{P}\\ S(x_0,x_0)\leftrightarrow\neg S(x_0,x_0)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}A\\ \mathcal{Q}\\ \neg S(x_0,x_0)\end{matrix}}{S(x_0,x_0)}\ {\scriptstyle\leftrightarrow\,\mathrm{E}} \qquad \begin{matrix}A\\ \mathcal{Q}\\ \neg S(x_0,x_0)\end{matrix}}{S(x_0,x_0)\land\neg S(x_0,x_0)}\ {\scriptstyle\land\,\mathrm{T}}}{\neg(B\land\neg B)}\ {\scriptstyle\neg\,\mathrm{T}}}{B\land\neg B}\ {\scriptstyle\neg\,\mathrm{E}}$$

Nyt voidaan koota varsinainen päättely:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x_0 A]^3 \qquad \begin{matrix}[A]^2\\ \mathcal{R}\\ B\land\neg B\end{matrix}}{B\land\neg B}\ {\scriptstyle\exists\,\mathrm{E},\,2,\,\mathbf{h1}}}{\neg\exists x_0 A}\ {\scriptstyle\neg\,\mathrm{T},\,3}$$

h1: muuttuja x_0 on vapaana vain oletuksessa A, erityisesti se ei ole vapaana kaavassa $B\land\neg B$.

6. Näytä, että $\vdash \neg\forall x_0\exists x_1 A \to \exists x_0\forall x_1\neg A$. Tämä on vaikea. Vihje: Oleta $\neg\forall x_0\exists x_1 A$, $\neg\exists x_0\forall x_1\neg A$, $\neg\exists x_1 A$ ja A ja päättele ristiriita kolme kertaa.

Ratkaisu:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A]^1$}
\RightLabel{$\exists$ T, **h1**}
\UnaryInfC{$\exists x_1 A$}
\AxiomC{$[\neg \exists x_1 A]^2$}
\RightLabel{$\wedge$ T}
\BinaryInfC{$\exists x_1 A \wedge \neg \exists x_1 A$}
\RightLabel{$\neg$ T, 1}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\RightLabel{$\forall$ T, **h2**}
\UnaryInfC{$\forall x_1 \neg A$}
\RightLabel{$\exists$ T, **h3**}
\UnaryInfC{$\exists x_0 \forall x_1 \neg A$}
\AxiomC{$[\neg \exists x_0 \forall x_1 \neg A]^3$}
\RightLabel{$\wedge$ T}
\BinaryInfC{$\exists x_0 \forall x_1 \neg A \wedge \neg \exists x_0 \forall x_1 \neg A$}
\RightLabel{$\neg$ T, 2}
\UnaryInfC{$\neg\neg \exists x_1 A$}
\RightLabel{$\neg$ E}
\UnaryInfC{$\exists x_1 A$}
\RightLabel{$\forall$ T, **h4**}
\UnaryInfC{$\forall x_0 \exists x_1 A$}
\AxiomC{$[\neg \forall x_0 \exists x_1 A]^4$}
\RightLabel{$\wedge$ T}
\BinaryInfC{$\forall x_0 \exists x_1 A \wedge \neg \forall x_0 \exists x_1 A$}
\RightLabel{$\neg$ T, 3}
\UnaryInfC{$\neg\neg \exists x_0 \forall x_1 \neg A$}
\RightLabel{$\neg$ E}
\UnaryInfC{$\exists x_0 \forall x_1 \neg A$}
\RightLabel{$\to$ T, 4}
\UnaryInfC{$\neg \forall x_0 \exists x_1 A \to \exists x_0 \forall x_1 \neg A$}
\end{prooftree}
$$

h1: muuttuja x_0 on vapaa itselleen
h2: muuttuja x_1 ei ole vapaa oletuksissa (koska A on jo kumottu)
h3: muuttuja x_0 on vapaa itselleen
h4: muuttuja x_0 ei ole vapaa oletuksissa (koska A ja $\neg\exists x_1 A$ ovat jo kumotut)

7. Näytä, että lausetta $\exists x_0 P_0(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0)$ ei voi päätellä lauseesta $\exists x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0))$.

   Ratkaisu: Olkoon malli $\mathcal{M}$ seuraava:

   $$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, P_1^{\mathcal{M}}) = (\{0,1\}, \{0\}, \{\}),$$

   eli universumi on $\{0,1\}$, predikaatti $P_0^{\mathcal{M}}$ on $\{0\}$ ja $P_1^{\mathcal{M}}$ tyhjä.

   Olkoon s jokin tulkintafunktio. Koska $1 \notin P_0^M$, niin $\mathcal{M} \not\models_{s(1/x_0)} P_0(x_0)$ ja edelleen $M \models_{s(1/x_0)} P_0(x_0) \to P_1(x_0)$, joten $\mathcal{M} \models_s \exists x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0))$.

   Koska $0 \in P_0^{\mathcal{M}}$, niin $M \models_{s(0/x_0)} P_0(x_0)$ ja edelleen $M \models_s \exists x_0 P_0(x_0)$. Koska $P_1^{\mathcal{M}}$ on tyhjä, niin $\mathcal{M} \not\models_{s(a/x_0)} P_1(x_0)$ kaikilla $a \in \{0,1\}$, joten $\mathcal{M} \not\models_s \exists x_0 P_1(x_0)$. Siten $\mathcal{M} \not\models_s \exists x_0 P(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0)$.

   Tämä osoittaa, että lause $\exists x_0 P_0(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0)$ ei ole lauseen $\exists x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0))$ looginen seuraus. Siten eheyslauseen nojalla lausetta $\exists x_0 P_0(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0)$ ei voi päätellä lauseesta $\exists x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0))$.