Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Lösning 1

Uppgift 1. Är följande mängder $A \subset \mathbb{R}^2$ öppna i den slutna kulan $\overline{B}(\bar{0}, 1)$?

(a) $A = \{(x, y) \in \overline{B}(\bar{0}, 1) : xy > 0\}$,
(b) $A = \{(x, y) \in \overline{B}(\bar{0}, 1) : x \geq 0\}$?

Lösning 1.

(a) Låt $f(x, y) = xy$. Vi vet att denna funktion är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$. Vi kan nu skriva om A,
$$A = \overline{B}(\bar{0}, 1) \cap f^{-1}(0, \infty).$$
Eftersom f är kontinuerlig och $(0, \infty)$ är en öppen mängd ser vi att A är snittet öppna mängden $f^{-1}(0, \infty)$ med slutna kulan. A är alltså öppen i slutan kulans topologi.
(b) Märk att $\bar{0} = (0, 0) \in A \cap \overline{B}(\bar{0}, 1)$. Och att $B(\bar{0}, r) \subset_o \overline{B}(\bar{0}, 1)$ relativt till $\overline{B}(\bar{0}, 1)$ för alla $r < 1$. Eftersom $B(\bar{0}, r)$ inte är en delmängd av $A \cap \overline{B}(\bar{0}, 1)$ för något som helst $r < 1$, följer att A inte är öppen relativt till $\overline{B}(\bar{0}, 1)$.

Uppgift 2. Antag att $A \subset_c \mathbb{R}^3$ och $U \subset_o \mathbb{R}^3$.

(a) Är $U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$ öppen?
(b) Är $A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$ sluten?

Lösning 2.

(a) Låt $(x, y, z) \in U$. Märk att $(x, y, z, \epsilon/2)$ är i $B((x, y, z, 0), \epsilon) \subset \mathbb{R}^4$ för alla $\epsilon > 0$. Produkten $U \times \{0\}$ är alltså inte öppen i $\mathbb{R}^4$, förutom när $U = \emptyset$ i vilket fall, $U \times \{0\} = \emptyset$, vilket är en öppen mängd.
(b) Vi visar att komplementet till $A \times \{0\}$ är en öppen mängd. Notera att
$$(x, y, z, w) \in \complement(A \times \{0\})$$
om $(x, y, z) \notin A$ eller $w \neq 0$ (eller båda).

Om $(x, y, z) \notin A$ så är $r = d((x, y, z), A) > 0$, eftersom A är en sluten mängd. Vidare gäller
$$d((x, y, z, w), A \times \{0\}) \geq d((x, y, z), A).$$
Alltså gäller $B((x, y, z, w), r) \subset \complement(A \times \{0\})$.

Om $w \neq 0$ så får vi motsvarande $B((x, y, z, w), |w|) \subset \complement(A \times \{0\})$. Således är
$$\complement(A \times \{0\})$$
öppen, och $A \times \{0\}$ sluten.

Uppgift 3. Visa att om $E \subset_c A \subset_c X$ så gäller $E \subset_c X$.

Lösning 3. Det finns alltså en sluten mängd B i topologin för X för vilken $B \cap A = E \cap A = E$. Eftersom E är snittet av två slutna mängder i X följer att $E \subset_c X$.

Uppgift 4. Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med egenskapen att det finns en mängd $A \subset \mathbb{R}^2$ så att

- $f|_A : A \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i A,
- $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus A} : \mathbb{R}^2 \setminus A \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2 \setminus A$ och
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är diskontinuerlig i alla punkter $x \in \mathbb{R}^2$.

Lösning 4. Låt,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{när } x, y \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{annars} \end{cases}.$$

- Det är tydligt att $f|_{f^{-1}(0)} : f^{-1}[0] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig eftersom den är konstant.
- Av samma skäl som vid förra punkten är $f|_{f^{-1}(1)}$ kontinuerlig.
- Låt $x \in \mathbb{R}^2$. Anta att $f(x) = 1$, fallet $f(x) = 0$ behandlas på ett liknande sätt. Ifall f är kontinuerlig vid x finns det för varje omgivning U av $f(x)$ en omgivning V av x för vilken $f(V) \subset U$. Märk nu att $f(V) = \{0, 1\}$ för alla omigvningar V av x. Vilket betyder att ingen omgivning V uppfyller kravet om vi väljer $U = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Uppgift 5. Antag att $X = A \cup B$, $V \subset A \cap B$, $V \cap A \subset_o A$ och $V \cap B \subset_o B$. Visa att $V \subset_o X$.

Lösning 5. Det finns alltså öppna mängder $C, D \subset_o X$ med egenskaperna,

$$C \cap A = V \cap A = V, D \cap B = V \cap B = V.$$

Märk att

$$\begin{aligned} C \cap D &= C \cap D \cap (A \cup B) \\ &= (C \cap D \cap A) \cup (C \cap D \cap B) \\ &= (D \cap V) \cup (C \cap V) \\ &= V \cap (D \cup C) \\ &= V \end{aligned}$$

Den sista likheten följer av att,

$$\begin{aligned} V = V \cap A \cap B &= (V \cap A) \cap (V \cap B) \\ &= D \cap C \cap A \cap B \\ &\subset D \cap C \\ &\subset D \cup C \end{aligned}$$

Påståendet följer, eftersom snittet av två öppna mängder är öppet.

Uppgift 6. Ge exempel på sådana mängder $A, B, V \subset \mathbb{R}$ att $\mathbb{R} = A \cup B$, $V \cap A \overset{\circ}{\subset} A$, $V \cap B \overset{\circ}{\subset} B$ men V inte är öppen i $\mathbb{R}$.

Lösning 6. Låt $V = \{1\}, A = \{1\}, B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Det är tydligt att $V \cap B = \emptyset \overset{\circ}{\subset} B$, $V \cap A = A \overset{\circ}{\subset} A$, och att $\{1\}$ inte är en öppen delmängd av $\mathbb{R}$.