Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Modellsvar till övning 2

Uppgift 1. Visa att en avbildning $f : X \to Y$ mellan metriska rum är kontinuerlig om och endast om $f^{-1}[\text{int}B] \subset \text{int}f^{-1}B$ för varje mängd $B \subset Y$.

Lösning 1. Märk att när $A \subset B$ följer att $\text{int}A \subset \text{int}B$, $\text{int}A \subset A$, och att ifall A är en öppen mängd följer att $\text{int}A = A$.

Om nu f är kontinuerlig och B är en delmängd till Y, så är $\text{int}B$ öppen, och därmed är också $f^{-1}[\text{int}B]$ öppen, dvs $f^{-1}[\text{int}B] = \text{int}f^{-1}[\text{int}B]$. Eftersom $\text{int}B \subset B$, gäller $f^{-1}[\text{int}B] \subset f^{-1}B$ och därmed också $\text{int}f^{-1}[\text{int}B] \subset \text{int}f^{-1}B$. Vi har alltså

$$f^{-1}[\text{int}B] = \text{int}f^{-1}[\text{int}B] \subset \text{int}f^{-1}B.$$

Om å andra sidan $f^{-1}[\text{int}B] \subset \text{int}f^{-1}B$ gäller för varje $B \subset Y$, kan vi låta B vara en godtycklig öppen delmängd av Y. Då gäller $B = \text{int}B$, så $f^{-1}B = f^{-1}[\text{int}B] \subset \text{int}f^{-1}B$, dvs $f^{-1}B$ måste vara öppen. Således är f kontinuerlig.

Uppgift 2. Antag att A är en delmängd i det metriska rummet X.

(a) Visa att $\partial\partial A \subset \partial A$.
(b) Ge exempel på ett fall där $\partial\partial A \neq \partial A$.

Lösning 2.

(a) Vi använder oss av att $\partial A = \bar{A} \setminus \text{int}A$ och att $\overline{(\partial A)} = \partial A$ (randen är alltid sluten) av vilket påståendet följer direkt.

$$\begin{aligned} \partial\partial A &= \overline{(\partial A)} \setminus \text{int}(\partial A) \\ &\subset \overline{(\partial A)} \\ &= \partial A \end{aligned}$$

(b) Välj $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Märk att $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ och att $\partial\partial\mathbb{Q} = \partial\mathbb{R} = \emptyset$.

Uppgift 3. Visa att

(a) $X \approx X$,
(b) om $X \approx Y$ så gäller $Y \approx X$,
(c) om $X \approx Y \approx Z$ så gäller $X \approx Z$,

för alla metriska rum X, Y, Z (gäller mer allmänt för alla topologiska rum).

Lösning 3.

(a) Det är tydligt att $id_X : X \to X$ är en bijektion och eftersom urbilden av varje öppen mängd är en öppen mängd och id_X är sin egen invers följer att $X \approx X$.
(b) Om $X \approx Y$ finns det ett en kontinuerlig bijektion $f : X \to Y$ med en kontinuerlig invers. Det är tydligt att f^{-1} är en kontinuerlig bijektion från Y till X med en kontinuerlig invers. Alltså är $Y \approx X$.
(c) Om $X \approx Y \approx Z$ finns det homeomorfismer $f : X \to Y$ och $g : Y \to Z$. Notera nu att eftersom f och g är en bijektioner är $g \circ f : X \to Z$ en bijektion, och att $g \circ f$ är kontinuerlig som en sammansatt funktion av kontinuerliga funktioner. På samma sätt visar man att $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ är kontinuerlig. Alltså $X \approx Z$.

Uppgift 4. Bevisa att om $f : X \approx Y$ och $A \subset X$, så gäller

(a) $\overline{fA} = f\overline{A}$,
(b) $\partial fA = f\partial A$.

Lösning 4.

(a) Märk att en homeomorfism f har egenskapen att urbilderna av slutna mängder är slutna och slutna mängder avbildas på slutna mängder. Eftersom $fA \subset f\overline{A}$ och $f\overline{A}$ är sluten, gäller $\overline{fA} \subset f\overline{A}$. Vidare gäller $fA \subset \overline{fA}$ så $A = f^{-1}fA \subset f^{-1}\overline{fA}$ och den senare är sluten. Således har vi $\overline{A} \subset f^{-1}\overline{fA}$, vilket ger $f\overline{A} \subset \overline{fA}$.
(b) Eftersom $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$ och f är en bijektion, gäller $f\partial A = f\overline{A} \cap f\overline{\complement A}$. Av a)-delen (och bijektiviteten av f) följer nu

$$f\partial A = f\overline{A} \cap f\overline{\complement A} = \overline{fA} \cap \overline{f\complement A} = \overline{fA} \cap \overline{\complement fA} = \partial fA.$$

Uppgift 5. Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ är grafen $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ för f. Metriken i Γ är den som induceras av den vanliga metriken i planet. Visa att $\Gamma \approx \mathbb{R}$.

Lösning 5. Välj $g : \mathbb{R} \to \Gamma, x \mapsto (x, f(x))$. Vi visar nu att g är en homeomorfism. Vänster inversen g^{-1} till g är helt enkelt projektionen på första komponenten. Eftersom topologin i Γ inducerats av den normala metriken i planet är g^{-1} kontinuerlig. Notera även att $gg^{-1}(x, f(x)) = g(x) = (x, f(x))$, dvs. g^{-1} är faktiskt även g:s höger invers av vilket det följer att g är en bijektion.

Det kvarstår endast att visa att g är kontinuerlig. Notera att funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, f(x))$ helt tydligt är kontinuerlig, eftersom båda komponenterna är kontinuerliga. Men g är begränsningen av h till sin avbild, $h[\mathbb{R}] = \Gamma \subset \mathbb{R}^2$, och är därmed också kontinuerlig.

Uppgift 6. Antag att $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att ekvationen

$$f(x, y) = (x, y + g(x)), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

definierar en homeomorfism $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och bestäm formeln för f^{-1}.

Lösning 6. Eftersom båda komponentfunktionerna till f är kontinuerliga är även f kontinuerlig. Inversen f^{-1} till f är funktionen $f^{-1} : (x, y) \mapsto (x, y - g(x))$. Funktionen f^{-1} är kontinuerlig av exakt samma orsak som f. Eftersom f^{-1} är en tvåsidig invers till f följer att f är en bijektion och påståendet följer.