Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Modellsvar till övning 3

Uppgift 1. Låt $(V, \|\cdot\|_V)$ och $(W, \|\cdot\|_W)$ vara normrum. I linjära algebran visas att produktrummet $V \times W$ av vektorrummen V och W är ett vektorrum då addition och skalärprodukt definieras enligt $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$ och $a(v, w) = (av, aw)$, för $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ och $a \in \mathbb{R}$.

Definiera funktioner $\|\cdot\|_0 : V \times W \to [0, \infty[$, $\|\cdot\|_1 : V \times W \to [0, \infty[$ och $\|\cdot\|_2 : V \times W \to [0, \infty[$ enligt $\|(v, w)\|_0 = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\}$, $\|(v, w)\|_1 = \|v\|_V + \|w\|_W$ och $\|(v, w)\|_2 = \sqrt{\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2}$, där $v \in V$ och $w \in W$.

Visa att $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ och $\|\cdot\|_2$ är normer i vektorrummet $V \times W$.

Lösning 1. Vi börjar med att visa att alla normerna är noll vid och endast vid noll vektorn. Notera att,

$$\max(\|v\|_V, \|w\|_W) \leq \sqrt{\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2} \leq \|v\|_V + \|w\|_W,$$

för alla $v \in V, w \in W$. Det räcker alltså att vi visar att $\|(0_V, 0_W)\|_1 = 0$ och att $\|(v, w)\|_0 = 0$ endast om $(v, w) = (0_V, 0_W)$. Nu är $\|(0_V, 0_W)\|_1 = \|0_V\|_V + \|0_W\|_W = 0 + 0 = 0$ och om $\|(v, w)\|_0 \neq 0$, så är $\max\{\|v\|_V, \|w\|_W\} \neq 0$, dvs antingen $\|v\|_V \neq 0$ eller $\|w\|_W \neq 0$, i vilket fall antingen $v \neq 0_V$ eller $w \neq 0_W$.

Till näst visar vi att alla tre funktionerna är absolut homogena, dvs. $\|\alpha a\|_i = |\alpha|\|a\|_i$ för alla skalärer α och vektorer $a \in V \times W$ var $i \in \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{aligned}
\|\alpha(v, w)\|_0 &= \max\{\|\alpha v\|_V, \|\alpha w\|_W\} = \max\{|\alpha|\|v\|_V, |\alpha|\|w\|_W\} \\
&= |\alpha|\|(v, w)\|_0 \\
\|\alpha(v, w)\|_1 &= \|\alpha v\|_V + \|\alpha w\|_W = |\alpha|\|v\|_V + |\alpha|\|w\|_W \\
&= |\alpha|\|(v, w)\|_1 \\
\|\alpha(v, w)\|_2 &= \sqrt{|a|^2\|v\|_V^2 + |a|^2\|w\|_W^2} = |a|\|(v, w)\|_2
\end{aligned}$$

Det kvarstår endast att visa att alla tre funktionerna uppfyller triangelolikheten.

$$\begin{aligned}
\|(v, w) + (x, y)\|_0 &= \max\{\|v + x\|_V, \|w + y\|_W\} \leq \max\{\|v\|_V + \|x\|_V, \|w\|_W + \|y\|_W\} \\
&\leq \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\} + \max\{\|x\|_V, \|y\|_W\} = \|(v, w)\|_0 + \|(x, y)\|_0 \\
\|(v, w) + (x, y)\|_1 &= \|v + x\|_V + \|w + y\|_W \leq \|v\|_V + \|x\|_V + \|w\|_W + \|y\|_W \\
&= \|(v, w)\|_1 + \|(x, y)\|_1 \\
\|(v, w) + (x, y)\|_2 &= \sqrt{\|v + x\|_V^2 + \|w + y\|_W^2} \leq \sqrt{(\|v\|_V + \|x\|_V)^2 + (\|w\|_W + \|y\|_W)^2} \\
&\leq \sqrt{\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2} + \sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2} = \|(v, w)\|_2 + \|(x, y)\|_2
\end{aligned}$$

Att den sista olikheten gäller följer direkt av formen den tar när man kvadrerar båda sidorna. Det följer nu att alla givna funktioner faktiskt är normer.

Uppgift 2. Visa att normerna $\|\cdot\|$ och $|||\cdot|||$ i vektorrummet V är bilipschitz-ekvivalenta om och endast om den identiska avbildningen $\mathrm{id} : V \to V$ är en bilipschitz-avbildning mellan normrummen $(V, \|\cdot\|)$ och $(V, |||\cdot|||)$.

Lösning 2. Antag att det identitets funktionen för X är M-bilischitz. Vilket betyder att
$$\frac{\|x-y\|}{M} \leq |||\mathrm{id}(x) - \mathrm{id}(y)||| \leq M\|x-y\|,$$
för alla $x, y \in X$. Då gäller påståendet även i fallet var $y = 0$, dvs.
$$\frac{\|x\|}{M} \leq |||x||| \leq M\|x\|,$$
för alla $x \in X$. Men detta är ekvivalent med att normerna $\|\cdot\|$ och $|||\cdot|||$ är bilipschitz-ekvivalenta. Om vi istället antar det senare. Följer förstås att olikheten håller även då $x = a - b$ för alla $a, b \in X$, dvs.
$$\frac{\|a-b\|}{M} \leq |||a-b||| \leq M\|a-b\|,$$
för alla $a, b \in X$. Alltså är identitetsfunktionen M-bilipschitz. Vilket bevisar påståendet.

Uppgift 3. Antag att $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$ är definierad via $g(x, y) = \sqrt{|x-y|}$.

(a) Visa att g är en metrik i $\mathbb{R}^2$.
(b) Är g ekvivalent med den vanliga metriken d i $\mathbb{R}^2$?
(c) Är g bilipschitz-ekvivalent med d?

Lösning 3.

(a) Vi börjar med att visa att $g(x, y) = 0$ om och endast om $x = y$.
$$0 = g(x, y) = \sqrt{|x-y|} \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$
Till näst visar vi att $g(x, y)$ uppfyller triangelolikheten.
$$\begin{aligned} g(x, y) &= \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{z-y} \\ &= g(x, z) + g(z, y) \end{aligned}$$
var den sista olikheten kan visas hålla genom att gemföra höger och vänster sida efter kvadrering. Alltså satisfierar g triangelolikheten. Och eftersom
$$g(x, y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = g(y, x)$$
följer att g är en metrik.

(b) Ja metrikerna är ekvivalenta eftersom
$$\begin{aligned} B_{\mathbb{R}^2}(x, r^2) &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| < r^2\} = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{|x-y|} < r\} \\ &= B_g(x, r) \end{aligned}$$
Det vill säga alla öppna klot i $\mathbb{R}^2$ med den vanliga metriken är även öppna klot i $\mathbb{R}^2$ med metriken g. Vilket implicerar att $\mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en homeomorfism.

(c) Nej. Antag att det finns ett $M \geq 1$ för vilket,

$$\frac{|x-y|}{M} \leq g(x,y) \leq M|x-y|,$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$. Välj till exempel $x = (4M^2, 0)$ och $y = (0,0)$. Då är $d(x,y) = 4M^2$ men $g(x,y) = 2M < 4M = \frac{|x-y|}{M}$.

Uppgift 4. Låt $f : X \to Y$ vara en homeomorfism från det metriska rummet (X, d) till det metriska rummet (Y, d') och definiera $d_f : X \times X \to [0, \infty[$ genom $d_f(x,y) = d'(f(x), f(y))$ för varje $x, y \in X$.

(a) Visa att d_f är en metrik i X.
(b) Visa att d_f är ekvivalent med metriken d.

Lösning 4.

(a) Kom ihåg att f är en bijektion eftersom den är en homeomorfism. Vi börjar med att visa att $d_f(x,y) = 0$ om och endast om $x = y$. Notera att per defintion är $d_f(x,y) = 0$ om och endast om $d'(f(x), f(y)) = 0$. Eftersom d' är en metrik är detta ekvivalent med att $f(x) = f(y)$, och eftersom f är en bijektion är det i sin tur ekvivalent med att $x = y$. Märk att det i sista steget egentligen räcker att f är en injektion.

Vi visar snabbt att d_f är symmetrisk med en direkt manipulation.

$$d_f(x, x') = d'(f(x), f(x')) = d'(f(x'), f(x)) = d_f(x', x).$$

Nu kvarstår endast att visa att d_f satisfierar triangelolikheten, vilket är enklast att göra direkt. Låt $z \in X$.

$$\begin{aligned} d_f(x,y) = d'(f(x), f(y)) &\leq d'(f(x), f(z)) + d'(f(z), f(y)) \\ &= d_f(x,z) + d_f(z,y) \end{aligned}$$

Vilket bevisar påståendet.

Observera att vi behövde faktiskt bara att f är en injektion, och att kontinuiteten inte ännu spelat någon roll.

(b) Notera att f är en homeomorfism, rentav en isometri, från (X, d_f) till (Y, d') och att inversen f^{-1} är en homeomorfism från (Y, d') till (X, d). Om vi komponerar dessa två homeomorfismer får vi identitets homeomorfismen från (X, d_f) till (X, d). Eftersom identitetsfunktionen mellan dessa metriska rymder är en homeomorfism, följer att metrikerna d_f och d är ekvivalenta.

Uppgift 5. Antag att $X =]0, 1[$ och $e(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ för $x, y \in X$. Visa att

(a) e är en metrik i X.
(b) e är ekvivalent med den vanliga metriken i X.
(c) Det finns ingen metrik e' i $\mathbb{R}$ som skulle kunna inducera e och vara ekvivalent med den vanliga metriken i $\mathbb{R}$.

Lösning 5.

(a) Vi börjar med att visa att $e(x, y) = 0$ om och endast $x = y$. Detta är ekvivalent med att visa att $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$, vilket definitivt är ekvivalent med att $x = y$.

Till näst visar vi att $e(x, y)$ är symmetrisk.

$$e(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| = e(y, x).$$

Nu kvarstår endast att verifiera att e satisfierar triangelolikheten. Låt $z \in]0, 1[$.

$$e(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \leq |\frac{1}{x} - \frac{1}{z}| + |\frac{1}{z} - \frac{1}{y}| = e(x, z) + e(z, y).$$

Vilket bevisar att e är en metrik.

(b) Välj $f : x \mapsto x^{-1}$. Funktionen f är tydligt en homeomorfism från $]0, 1[$ till $]1, \infty[$ med den vanliga metriken i båda rummen. Vi använder oss till följande av resultatet vi fick i uppgift 4. (X, d) och (Y, d') är $(]0, 1[, d)$ och $(]1, \infty[, d)$ (d är den vanliga metriken i $\mathbb{R}$). Då är $d_f = e$ och enligt uppgift 4 är d och $d_f = e$ ekvivalenta metriker i X.

(c) Anta att det finns en metrik e' i $\mathbb{R}$ som inducerar e och är ekvivalent med den vanliga metriken i $\mathbb{R}$. Låt $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. I den vanliga metriken är $\partial A = A \cup \{0\}$. Medan i metriken inducerad av e' är $\partial A = A$. Men om metrikerna är ekvivalenta är identitetsfunktionen en homeomorfism, alltså borde mängderna vara lika i båda rummena.

Uppgift 6. Antag att $Z = X \times Y$ är produkten av två metriska rum och att $E \subset X$ och $F \subset Y$. Visa att

(a) Om E och F är öppna så är också $E \times F$ det.
(b) Motsvarande gäller för slutna mängder.

Lösning 6. Antag att metriken på Z är summan av metrikerna av dess faktorer, dvs. e_1 metriken.

(a) Låt $(p, q) \in E \times F$. Eftersom E, F är öppna existerar radier $e, f > 0$ för vilka $B_X(p, e) \Subset E$ och $B_Y(q, f) \Subset F$. Låt $r = \min\{e, f\}$. Då gäller $B_Z((p, q), r) \subset E \times F$.

(b) Vi reducerar problemet till fallet med öppna mängder.

$$\complement(E \times F) = (\complement E \times Y) \cup (X \times \complement F)$$

Alltså är komplementet till $E \times F$ unionen av två öppna mängder. Påståendet följer.