Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Modellsvar till övning 4

Uppgift 1. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärde och triangelolikheten att för varje normrum $(V, \|\cdot\|)$ gäller:

(a) Om (x_k) och (y_k) är följder så att $x_k \to x$ och $y_k \to y$, så gäller $x_k + y_k \to x + y$.
(b) Om (a_k) är en följd i $\mathbb{R}$, (x_k) är en följd i V och $a_k \to a$, $x_k \to x$, så gäller $a_k x_k \to ax$.

Notera: resultatet finns i Väisäläs bok, men meningen med uppgiften är att ge ett annat bevis.

Lösning 1.

(a) Låt U vara en omgivning kring punkten $x + y$. Då finns det ett $r > 0$ för vilket $B(x + y, r) \subset U$. Välj nu n_x, n_y så att

$$x_n \in B(x, \frac{r}{2}), \forall n \geq n_x,$$
$$y_n \in B(y, \frac{r}{2}), \forall n \geq n_y,$$

och låt $n_{x+y} = \max\{n_x, n_y\}$. Nu följer att

$$\|x_n + y_n - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < r, \forall n > n_{x+y}.$$

Påståendet följer.

(b) Det räcker att vi visar påståendet för alla öppna klot kring ax. Välj $r > 0$. Vi börjar med att göra ett estimat,

$$\begin{aligned}\|a_n x_n - ax\| &= \|a_n x_n - a_n x + a_n x - ax\| \leq \|a_n(x_n - x)\| + \|x(a_n - a)\| \\ &= |a_n|\|x_n - x\| + \|x\||a_n - a| \\ &\leq (|a_n - a| + |a|)\|x_n - x\| + \|x\||a_n - a|.\end{aligned}$$

Välj n_a så att

$$|a_n - a| < \frac{r}{2(\|x\| + 1)}, \forall n > n_a.$$

Vi kan nu vidare utveckla vårt estimat

$$\|a_n x_n - ax\| < (\frac{r}{2(\|x\| + 1)} + |a|)\|x_n - x\| + \frac{r}{2}, \forall n > n_a.$$

Välj nu n_x så att

$$\|x_n - x\| < \frac{r}{2(\frac{r}{2(\|x\|+1)} + |a|)}), \forall n > n_x.$$

Estimatet antar nu formen

$$\|a_n x_n - ax\| < r, \forall n > \max\{n_a, n_x\}.$$

Påståendet följer.

Uppgift 2. Undersök om följande följder (x_n) i $\mathbb{R}^n$ konvergerar. Bestäm gränsvärdena i de konvergenta fallen.

(a) $x_n = (n^{-1}, e^{-n}, (-1)^n)$,
(b) $x_n = (n^{-1}, e^{-n}, n)$,
(c) $x_n = (\sin(1+n^{-1}), \arctan n, n^{-10})$.

Lösning 2. För den här uppgiften är det bra att notera att projektionerna från $\mathbb{R}^n$ till var komponent är kontinuerlig och att ifall en följd $x_n \to x$ och f är kontinuerlig följer att $f(x_n) \to f(x)$. Av dessa två observationer följer att för att en följd i $\mathbb{R}^n$ skall konvergera måste den nödvändigtvis konvergera i var komponent.

(a) Vi vet från analys att följden $(-1)^n$ inte konvergerar i $\mathbb{R}$. Därmed konvergerar inte $(n^{-1}, e^{-n}, (-1)^n)$ i $\mathbb{R}^3$.
(b) Följden n konvergerar inte i $\mathbb{R}$. Med samma resonemang som i a) konvergerar inte följden i fråga i $\mathbb{R}^3$.
(c) Märk att varje komponentfunktion konvergerar.

$$\sin(1+n^{-1}) \to \sin(1), \arctan(n) \to \frac{\pi}{2}, n^{-10} \to 0$$

Det är värt att observera att ifall en följd konvergerar under varje projektion så konvergerar följden även i produktrummet. Tänk på situationen i att allmänt produktrum av m metriska rum. Låt produktrummet ha e_1 metriken. Låt $r > 0$. Välj nu $n_1, n_2, \ldots, n_m, m$ så att

$$d_i(p_i(x_n), p_i(x)) < \frac{r}{m}, \forall n > n_i.$$

Det följer att

$$d(x_n, x) \leq \sum_{i=1}^{m} d_i(p_i(x_n), p_i(x)) < r.$$

Av vilket påståendet följer. Och eftersom

$$d_i(p_i(x_n), p_i(x)) \leq d(x_n, x),$$

följer att konvergensen faktiskt kan sägas konvergera komponentvis. Vilket betyder att även i vårt fall konvergerar följden i fråga och att den konvergerar mot punkten $(\sin(1), \frac{\pi}{2}, 0)$.

Uppgift 3. Antag att $a \in X$ och att (x_n) är en följd i rummet X sådan att varje delföljd har en delföljd som konvergerar mot a. Visa att $x_n \to a$.

Lösning 3. Anta att x_n inte konvergerar mot a. Då kan ett $\epsilon > 0$ väljas så att för varje $m \in \mathbb{N}$ finns ett $k > m$ så att $d(x_k, a) > \epsilon$. Låt nu $x'_1 = x_{m_1}$ för vilket $d(x_{m_1}, a) > \epsilon$, och välj sedan $x'_{k+1} = x_{m_{k+1}}, d(x_{m_{k+1}}, a) > \epsilon$ och $m_{k+1} > \max\{m_1, \ldots, m_k\}$. Delföljden x'_n konvergerar inte mot a eftersom $d(x'_n, a)$ inte går mot 0. Vilket är en motsägelse. Påståendet följer.

Uppgift 4. Antag att $x_n = (\cos(n\pi/2), \sin(n\pi/2)) \in \mathbb{R}^2$. Bestäm anhopningsvärdena till följden (x_n). Sök för varje anhopningsvärde en delföljd som konvergerar mot det.

Lösning 4. Lägg märke till att eftersom både sin och cos är 2π periodiska följer att efter $n = 4$ börjar följden uprepa sig själv. Eftersom dessa punkter uprepas oändligt många gånger är vart och ett av dem ett anhopningsvärde. Inga fler anhopningsvärden existerar eftersom varje annan punkt i $\mathbb{R}^2$ har en omgivning som är disjunkt från alla värden i följden.

Angående konvergerande delföljder har vi

$$\begin{aligned} x_{4n-3} &= (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2)) = (0, 1) \\ x_{4n-2} &= (\cos(\pi), \sin(\pi)) = (-1, 0) \\ x_{4n-1} &= (\cos(3\pi/2), \sin(3\pi/2)) = (0, -1) \\ x_{4n} &= (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) = (1, 0) \end{aligned}$$

Uppgift 5. Granska följden (f_n) i normrummet $C[0,1]$ med normen $|\cdot|_\infty$ där $|g|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|g(t)|)$ och $f_n(t) = e^{t/n}$ för $t \in [0,1]$ och $n \in \mathbb{N}$. Visa att $f_n \to 1$, där $1(t) = 1$ för varje $t \in [0,1]$. (Tips: medelvärdessatsen)

Lösning 5. Vi kommer att använda oss av följande konsekvens av medelvärdessatsen.

$$\sup_{t\in[0,1]} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \leq \sup_{t\in[0,1]} f'(t).$$

Olikheten följer direkt efter att applicera supremum först till höger och sedan till vänster. Notera att för att veta att supremum existerar förlitar vi oss på att funktionerna är kontinuerliga, och att de därför har ett maximi värde över begränsade intervall. Vi använder oss alltså också av att f' är kontinuerlig.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |f_n - 1|_\infty &= \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - 1| = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |\frac{f_n(t) - f_n(0)}{t - 0} t| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |f_n'(t)| \sup_{t\in[0,1]} |t| = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |\frac{e^{t/n}}{n}| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}}{n} = 0 \end{aligned}$$

Notera: Det är rätt enkelt att visa att konvergens med avseende på sup normen är samma sak som likformig konvergens. Vi har alltså visat att följden konvergerar likformigt.

Uppgift 6. Antag att (x_n) är en följd i rummet X. Visa att mängden av anhopningsvärden till följden är sluten.

Lösning 6. Låt $a \in X$ vara en punkt som inte är ett anhopningsvärde till (x_n). Då finns det en omgivning U kring a som svarar mot ett ändligt index n_u för vilket följden inte längre har punkter i U för index större än n_u. Därmed är hela U en mängd av punkter som inte är anhopningspunkter till följden (x_n). Mängden av punkter som inte utgör anhopningspunkter till (x_n) är därmed öppen. Det följer att mängden anhopningspunkter är sluten.