Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Ylimääräisiä harjoitustehtäviä

---

1. Osoita, että normin neliö

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2$$

on differentioituva pisteessä $a \in \mathbb{R}^n$ ja, että sen derivaatalle on voimassa

$$Df(a)u = 2(a \mid u) \quad \text{kaikille } u \in \mathbb{R}^n.$$

2. Osoita, että kuvaus

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (x_1x_2^2, x_2 \cos x_1, x_3)$$

on jatkuvasti differentioituva. Laske myös kuvauksen f Jacobin determinantti pisteessä $x \in \mathbb{R}^3$. Mikä on kuvauksen f Jacobin matriisin aste pisteessä $a = (0, 0, 0)$?

3. Määritä kuvauksen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (e^x, \cos x, \sin x)$$

derivaatta ja Jacobin matriisi pisteessä $a = 0$. Mikä on kuvauksen f Jacobin matriisin aste origossa?

4. Määritä funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2$$

(a) derivaattakuvaus ja derivaatan matriisi pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) gradienttivektori pisteessä $x \in \mathbb{R}^2$.

(c) Hessen matriisi pisteessä $x \in \mathbb{R}^2$.

(d) kriittiset pisteet joukossa $\mathbb{R}^2$.

(e) kohdassa (d) löytämiesi kriittisten pisteiden laatu.

(f) Hahmottele graafit funktioille f ja sen lineaariaffiinille approksimaatiolle

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(a) + Df(a)(x - a)$$

pisteessä $a = (0, 1)$.

5. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} (x \cos x, x^2 \sin(1/x)), & \text{jos } x \neq 0 \\ (0, 0), & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

Osoita, että kuvaus f on differentioituva ja määritä sen derivaatta pisteessä $a \in \mathbb{R}$.

6. Tarkastellaan kuvausta

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (x_1x_2, x_1^2 + x_2^2).$$

(a) Määritä kuvauksen f suunnattu derivaatta pisteessä $a = (1, 2)$ vektoreiden

$$v_1 = (1, 1), \quad v_2 = (-3, 4) \quad , v_3 = (-1, -1) \quad \text{ja} \quad v_4 = (3, -4)$$

suuntaan.

(b) Määritä kuvauksen f Jacobin matriisi pisteessä $x \in \mathbb{R}^2$.

(c) Missä pisteissä kuvaus f on lokaalisti kääntyvä?

(d) Onko kuvaus f diffeomorfismi?

7. Tutki seuraavien kuvauksien lokaalia injektiivisyyttä:

(a)
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(x_1,x_2)=(x_1^2,x_1^2+x_2).$$
(b)
$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad g(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2,x_1x_2).$$

8. Tutki kuvauksen
$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2,\quad f(x_1,x_2)=(x_1^2-x_2^2,2x_1x_2)$$
lokaalia injektiivisyyttä. Onko f injektio?

9. Määritä funktion
$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad f(x)=\cos(\sin\|x\|^2)$$
derivaatta ja gradientti pisteessä $a\in\mathbb{R}^n$.

10. Olkoot U ja V avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja, ja olkoon
$$f:U\to V$$
diffeomorfismi. Osoita, että

(a) $Df(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ on bijektio kaikilla $x\in U$.

(b)
$$Df^{-1}(f(x))=Df(x)^{-1}\quad\text{kaikilla } x\in U.$$
(c)
$$J_f(x)J_{f^{-1}}(f(x))=1\quad\text{kaikilla } x\in U.$$

11. Tarkastellaan yhtälöä
$$\cos(x_1+x_2)+2\sin(x_2+x_3)+x_3=1.$$

(a) Osoita, että tällä yhtälöllä on pisteen $a=(0,0,0)$ ympäristössä muotoa
$$x_3=g(x_1,x_2)\quad\text{ja}\quad x_2=g(x_1,x_3)$$
olevat jatkuvasti differentioituvat ratkaisut.

(b) Ratkaise myös gradientit
$$\nabla g_3(0,0)\quad\text{ja}\quad\nabla g_2(0,0).$$

(c) Mitä implisiittifunktiolause sanoo muotoa $x_1=g(x_2,x_3)$ olevan ratkaisun olemassaolosta?

12. Osoita, että yhtälöllä
$$x+3y-xy^2+y^5=0$$
on origon ympäristössä täsmälleen yksi jatkuvasti derivoituva ratkaisu modossa $y=y(x)$. Osoita myös, että $y'(0)=-\frac{1}{3}$.

13. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} xyu + yuv = 0 \\ xy + yu + uv = 2 \end{cases}$$

pisteen $z_0 := (x_0, y_0, u_0, v_0) = (-2, 0, 2, 1)$ ympäristössä.

(a) Osoita, että tällä yhtälöparilla on pisteen z_0 ympäristössä muotoa

$$(y, u) = g(x, v) \quad \text{ja} \quad (y, v) = h(x, u)$$

olevat jatkuvasti differentioituvat ratkaisut.

(b) Ratkaise myös matriisit

$$\operatorname{mat} Dg(-2, 1) \quad \text{ja} \quad \operatorname{mat} Dh(-2, 2).$$

(c) Mitä implisiittifunktiolause sanoo muotoa

$$(x, u) = f(y, v)$$

olevien ratkaisuiden olemassaolosta?

14. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} \sin(x + y) + \cos u = 1 \\ \sin(y + u) + \cos v = 1. \end{cases}$$

(a) Osoita, että kyseisellä yhtälöparilla on pisteen $a = (0, 0, 0, 0)$ ympäristössä muotoa

$$(x, y) = g(u, v)$$

oleva jatkuvasti differentioituva ratkaisu.

(b) Määritä (a)-kohdan kuvaukselle g lineaarikuvauksen $Dg(0, 0)$ matriisi.

15. Osoita, että joukko

$$S = \{\mathbb{R}^3 : x_1 = x_2, x_3 = x_2^4\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä yksiulotteinen alkeispinta. Määritä lisäksi pinnan S tangenttisuora $\mathcal{T}_b$ ja normaalitason $\mathcal{N}_b$ pisteessä $b = (a, a, a^4)$.

16. Osoita, että joukko

$$S = \{\mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä kaksiulotteinen graafipinta. Määritä lisäksi pinnan S tangenttitaso $\mathcal{T}_b$ ja normaalisuora $\mathcal{N}_b$ pisteessä $b = (1, 1, 2)$.

17. Osoita, että joukko

$$S = \{\mathbb{R}^3 : \|x\| = 1, x_1 > 0\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä kaksiulotteinen graafipinta. Määritä lisäksi pinnan S tangenttitaso $\mathcal{T}_b$ ja normaalisuora $\mathcal{N}_b$ pisteessä $b = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

18. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jatkuvasti differentioituva kuvaus, jolle psiteessä $b = (1, 0, -1)$ on $f(b) = 0$ ja

$$\operatorname{mat} Df(b) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että tällöin joukko $S = f^{-1}(0)$ on pisteen b ympäristössä sileä käyrä. Määritä lisäksi joukot $\mathcal{T}_b$ ja $\mathcal{N}_b$ ja piirrä ne.

19. Tarkastellaan reaaliarvoista funktiota $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3 - x_1x_3\,.$$

Määritä funktion f kriittiset pisteet ja niiden laatu.

20. Osoita, että funktiolla

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x_1 - x_2^2 - x_3^2$$

ei ole ääriarvopisteitä.

21. Määritä funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2 + x_3^3 + 3x_1x_3$$

kriittiset pisteet ja tutki niiden laatua.

22. Mikä on avaruuden $\mathbb{R}^3$ tasojen

$$T_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = 6\} \quad \text{ja} \quad T_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 - x_3 = 3\}$$

leikkaussuoran etäisyys origosta? Entä pisteestä $a = (1, 1, 1)$?

23. Tarkastellaan polkuja

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (1 - t, t)$$

ja

$$\gamma : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \eta(t) = (\sin t, -\cos t).$$

Muodosta polut $\overleftarrow{\gamma}$, $\overleftarrow{\eta}$ ja $\gamma \vee \eta$. Laske lisäksi funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1x_2$$

integraali polun $\gamma \vee \eta$ suhteen.

24. Määritä poluille

$$\gamma : [-\pi, \tfrac{1}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$$

ja

$$\eta : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \eta(t) = (2t, 4 - 4t^2)$$

yhdistetty polku $\overleftarrow{\gamma} \vee \eta$ ja hahmottele siitä kuva. Laske myös funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1$$

integraali polun $\overleftarrow{\gamma} \vee \eta$ suhteen.

25. Laske polun

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^4, \quad \gamma(t) = (\sin t, \cos t, \sin t, \cos t)$$

pituus. Onko polku γ Jordan-polku? Entä onko se sileä?

26. Laske paraboloidin

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 2, z \geq 0\}$$

pinta-ala. Laske lisäksi funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$$

pintaintegraali yli joukon T. (Vinkki: Käytä apunasi napakoordinaattimuunnosta, sekä sijoitusta $t = \sqrt{1 + 4r^2}$. Ratkaisuksi tulee $\frac{13}{3}\pi$ ja $\frac{371}{30}\pi$)

27. Laske funktion

$$h : B^2(0, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

graafin $\mathcal{G}_h$ pinta-ala. Laske lisäksi funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 + \frac{2}{z^4}$$

integraali yli pinnan $\mathcal{G}_h$. (Vinkki: tehtävässä tarvitsee ainoastaan tehdä napakoordinaattimuunnos. Vastaukseksi tulee $\pi(2\sqrt{2} - 1)$).

28. Joukko $E \subset \mathbb{R}^3$ syntyy, kun pallonpuolikas

$$B_+ := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 2, x_3 > 0\}$$

leikataan sylinterillä

$$H := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}.$$

Osoita, että reunajoukon ∂E pinta-ala on

$$\mathrm{Ala}(\partial E) = \pi(14 - 4\sqrt{2}).$$