Johdatus logiikkaan II

Harj. 6

Vihjeitä

1.

$$\dfrac{[\exists x_0 \forall x_1 R(F(x_0), x_1)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x_1 R(F(x_0), x_1)]^1}{R(F(x_0), F(F(x_0)))}\,\forall E}{\exists x_0 R(x_0, F(x_0))}\,\exists I}{\dfrac{\exists x_0 R(x_0, F(x_0))}{\exists x_0 \forall x_1 R(F(x_0), x_1) \to \exists x_0 R(x_0, F(x_0))}\,\to I, 2}\,\exists E, 1$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x_0 \forall x_1 ((x_0 = x_1 \wedge P(x_0)) \to P(x_1))}{\forall x_1 ((c_0 = x_1 \wedge P(c_0)) \to P(x_1))}\,\forall E}{(c_0 = x_0 \wedge P(c_0)) \to P(x_0)}\,\forall E \qquad \dfrac{[c_0 = x_0]^1 \quad P(c_0)}{c_0 = x_0 \wedge P(c_0)}\,\wedge I}{P(x_0)}\,\to E \qquad [\neg P(x_0)]^2}{P(x_0) \wedge \neg P(x_0)}\,\wedge I}{\neg c_0 = x_0}\,\neg I, 1}{\dfrac{\neg P(x_0) \to \neg c_0 = x_0}{\forall x_0 (\neg P(x_0) \to \neg c_0 = x_0)}\,\forall I}\,\to I, 2$$

3. a) $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = F^{\mathcal{M}}(x_2^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = F^{\mathcal{M}}(2) = 5$

b) $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = G^{\mathcal{M}}(F^{\mathcal{M}}(3), 4) = 11$

c) $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = F^{\mathcal{M}}(G^{\mathcal{M}}(2, F^{\mathcal{M}}(3))) = 12$

d) $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = G^{\mathcal{M}}(G^{\mathcal{M}}(1,4), F^{\mathcal{M}}(3)) = 13$

4. a) Ei negatiiviset: Rekursiolla $n \in \mathbb{N}$ suhteen määritellään $t_0 = c_0$ ja $t_{n+1} = F(t_n, c_1)$

Helppo induktio näyttää että $t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = n$ (kaikilla s).

Toisaalta helppo induktio termin t rakenteen suhteen näyttää että $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle \geq 0$ jos t on vakiotermi: Selvästi tämä pätee termeille c_0 ja c_1 ja jos $t = F(t_1, t_2)$

ja vakiotermi niin t_1 ja t_2 ovat vakiotermejä

jolloin ind. ol. $\Rightarrow$ $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle + t_2^{\mathcal{M}}\langle s\rangle \geq 0$

b) Kaikille: jos $n \in \mathbb{N}$, niin $x_0 = t_n$

määrittelee $\{n\}$:n ja $F(x_0, t_n) = c_0$

määrittelee joukon $\{-n\}$.

③

5. Ovat: $\pi : A_6 \to A_3 \times A_2$ on isomorfismi

kun $\pi(0) = (0,0)$, $\pi(1) = (1,1)$, $\pi(2) = (2,0)$,

$\pi(3) = (0,1)$, $\pi(4) = (1,0)$ ja $\pi(5) = (2,1)$

6. Eivät: olkoon $A = \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 ((R(x_0, x_1) \wedge R(x_1, x_2)) \to x_0 = x_2)$.

Nyt $M_{2,2} \models A$ mutta $M_4 \not\models A$.