Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Modellsvar till övning 5

Uppgift 1. Antag att $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är funktionen $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$, då $n \in \mathbb{N}$. Undersök huruvida funktionsföljden (f_n) konvergerar (a) punktvis, (b) likformigt i $\mathbb{R}$. Undersök samma sak ifall $\mathbb{R}$ har $\{0, 1\}$-metrik (diskreta metriken).

Lösning 1. Om följden konvergerar ser vi att den måste konvergera mot 0 (konstanta 0-funktionen).

(a) Följden konvergerar i båda metrikerna punktvis. Vi kan de facto välja samma $N \in \mathbb{N}$ för bägge metriker. Låt $x \in \mathbb{R}$. Välj $N_x = \lceil x \rceil$. Nu följer att $|f_n(x) - 0| = 0$ för alla $n > N_x$. Följden konvergerar alltså punktvis i båda metrikerna.
(b) Följden konvergerar inte likformigt i någondera av metrikerna. För varje $N \in \mathbb{N}$ kan vi välja $x = N + 1$ för vilket vi har

$$d(f_N(x), 0) \geq 1$$

och således $\sup_{x \in \mathbb{R}} d(f_N(x), 0) \geq 1$ i båda metrikerna.

Uppgift 2. Visa att om $b = \lim_{x \to a, x \in A} f(x)$ så gäller $b \in \overline{fA}$.

Lösning 2. Anta att $b \notin \overline{fA}$ och att $b = \lim_{x \to a, x \in A} f(x)$. Av första antagandet följer att b har en omgvning kring sig som är disjunkt från fA. Av andra antagandet följer att det för varje omgivning V till b finns en omgivning U till a så att $f[A \cap U] \subset V$, dvs. varje omgivning V till b möter fA (kom ihåg att gränsvärdet längs A definieras bara då $a \in \bar{A}$ och $A \cap U \neq \emptyset$). Men nu har vi nått en motsägelse. Påståendet följer.

Uppgift 3. Definiera funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på följande sätt: $f(x, y) = 1$, då $x^4 < y < x^2$ och $f(x, y) = 0$ i övriga punkter (x, y). Bevisa att:

(a) $\lim_{z \to \bar{0}, z \in L} f(z) = 0$ för varje rät linje L som går genom origo,
(b) $\lim_{z \to \bar{0}} f(z)$ inte existerar.

Lösning 3.

(a) Låt $y = kx$, när $k \in R$. Då är värdet av funktionen längs linjen (x, kx) $f(x, kx) = 1$ när $x^4 < kx < x^2$ (dvs. $x > 0$ och $x^3 < k < x$ då k är positiv och $x < 0$ och $x^3 > k > x$ då k är negativ) och noll annars. Vi ser att ifall $k \geq 0$ är funktionen noll när $x \leq k$. Ifall $k < 0$ är funktionen noll när $x \geq k$, dvs. när x är tillräckligt nära 0. Gränsvärdet är därmed noll.

$$\lim_{x \to 0} f(x, kx) = 0$$

Det kvarstår endast att granska fallet $x = 0$, dvs. rakt längs y-axeln. Men $f(0, y) = 0$ för alla y. Påståendet följer.

(b) Låt $y = |x^3|$. För små värden på y är $x^4 < |x^3| < x^2$. Alltså är gränsvärdet längs mängden $\{(x, |x^3|) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ konstant 1. Eftersom detta inte stämmer överens med a) delens reslutat existerar inte gränsvärdet kring origo.

Uppgift 4. Antag att (x_n) är en följd i X. Beteckna $A_n = \{x_j : j \geq n\}$ då $n \in \mathbb{N}$. Visa att (x_n) är Cauchy om och endast om $d(A_n) \to 0$ då $n \to \infty$.

Lösning 4. Låt x_n vara en Cauchy följd dvs.

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N (d(x_n, x_m) < \epsilon)$$

Notera att

$$d(A_N) := \sup_{n,m>N} d(x_n, x_m).$$

Alltså följer att

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}(d(A_N) < \epsilon).$$

Vilket är definitionen för att $d(A_n) \to 0$ när $n \to \infty$.

Låt nu x_n vara en sådan följd att $d(A_n)$ går mot 0 när $n \to \infty$. Välj nu ett $\epsilon > 0$ då finns ett $N \in N$ för vilket $d(A_N) < \epsilon$. Nu följer att,

$$\forall m, n > N(d(x_n, x_m) < \epsilon)$$

och påståendet följer.

Uppgift 5. Antag att (X, d) är ett metriskt rum och $A \subseteq X$ är en fullständig delmängd (dvs (A, d_A) är ett fullständigt metriskt rum). Visa att A är sluten i X.

Lösning 5. Om A är en fullständig delmängd konvergerar alla Cauchy följder i A. Välj en godtycklig randpunkt x till A. Bygg sedan en följd x_n så att $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Följden x_n är Cauchy och konvergerar därmed i A. Det är även tydligt att följden konvergerar mot x. Alltså är $x \in A$. Eftersom A innehåller alla sina randpunkter följer att A är sluten.

Uppgift 6. Antag att D är en mängd och $E = \text{begr}(D, \mathbb{R})$, rummet av alla begränsade funktioner $f : D \to \mathbb{R}$ försett med sup-norm. Visa att E är ett fullständigt rum, ett s.k. Banach-rum. (Använd dig av att $\mathbb{R}$ är ett fullständigt rum.)

Lösning 6. Låt f_n vara en Cauchy följd i E. Då finns för varje $\varepsilon > 0$ ett n_ε så att för varje $x \in D$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$$

då $n, m \geq n_\varepsilon$. Alltså är följderna $(f_n(x))$ Cauchy i $\mathbb{R}$ och av fullständighet följer att $f_n(x)$ konvergerar i $\mathbb{R}$.

Nu konvergerar (f_n) punktvis, och vi kan definiera funktionen $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Nu gäller för varje $x \in D$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$$

då $n \ge n_\varepsilon$. Eftersom n_ε är oberoende av x kan vi ta supremum över $x \in D$, och får då

$$\|f_n - f\| \le \varepsilon.$$

Alltså konvergerar (f_n) mot f i sup-normen. Vidare gäller för varje $x \in D$

$$|f(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|,$$

dvs. $\|f\| \le \|f - f_n\| + \|f_n\|$. Eftersom (f_n) är Cauchy, är den begränsad, vilket betyder att det finns något tal $M \in \mathbb{R}$ för vilket $\|f_n\| < M$ för alla n. Så då $n \ge n_\varepsilon$ gäller

$$\|f\| \le \|f - f_n\| + \|f_n\| \le \varepsilon + M.$$

Alltså är $f \in E$.