Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Modellsvar till övning 6

Uppgift 1. Antag att X är ett fullständigt rum och $f : X \to Y$ bilipschitz. Visa att mängden fX är fullständig och således sluten i Y.

Lösning 1.

Låt $f(x_n)$ vara en Cauchy följd is fX, och $M > 0$ vara bilipshitz konstanten för f. Då följer att,

$$d(x_n, x_m) \leq Md(f(x_n), f(x_m)),$$

alltså konvergerar följden x_n i X. Låt $x_n \to x$. Eftersom,

$$d(f(x_n), f(x)) \leq Md(x_n, x),$$

följer $f(x_n)$ konvergerar mot $f(x)$. Alltså konveregerar varje Cauchy följd i fX påståendet följer.

Uppgift 2. Antag att (X, d) och (Y, d') är metriska rum, $A \subset X$ och $f : \bar{A} \to Y$ en kontinuerlig avbildning som är likformigt kontinuerlig i A (dvs $f \restriction_A : A \to Y$ är likformigt kontinuerlig). Visa att f är likformigt kontinuerlig i hela $\bar{A}$.

Lösning 2. Låt $\varepsilon > 0$. Då finns ett $\delta > 0$ så att $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$ för alla $x, y \in A$ med $d(x, y) < \delta$. Låt $a, b \in \bar{A}$. Välj följder (x_n) och (y_n) i A så att $x_n \to a$, $y_n \to b$. Eftersom f är kontinuerlig i $\bar{A}$, finns $\delta_a > 0$ och $\delta_b > 0$ så att $d(f(x), f(a)) < \varepsilon/3$ då $d(x, a) < \delta_a$ och $d(f(x), f(b)) < \varepsilon/3$ då $d(x, b) < \delta_b$.

Låt nu n_0 vara sådant att $d(x_n, a) < \delta_a$ och $d(y_n, b) < \delta_b$ då $n \geq n_0$. Nu gäller

$$d(f(a), f(b) \leq d(f(a), f(x_{n_0})) + d(f(x_{n_0}), f(y_{n_0})) + d(f(y_{n_0}), b) \leq \varepsilon.$$

Uppgift 3. Visa att mängden $S^{n-1}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_2 = r\}$ är kompakt i rummet $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ för varje $x \in \mathbb{R}^n$ och $r > 0$. (Tips: Vad vet du om urbilden av slutna mängder för kontinuerliga funktioner?)

Lösning 3. Eftersom $\{r\} \mathrel{\text{⋐}} \mathbb{R}$ och $f_x(y) = \|x - y\|_2$ är kontinuerlig $f_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gäller

$$S^{n-1}(x, r) = f_x^{-1}\{r\} \mathrel{\text{⋐}} \mathbb{R}^n.$$

Eftersom $S^{n-1}(x, r) \subset B(0, 2r + \|x\|_2)$ följer att den är begränsad. Eftersom den är sluten och begränsad i $\mathbb{R}^n$ följer att den är kompakt.

Uppgift 4. Låt (X, d) vara ett kompakt metriskt rum och låt $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ vara en avtagande följd slutna icke-tomma delmängder. Visa att snittet $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}$ inte är tomt. (Tips: Om du väljer $x_n \in A_n$ för varje n, vad vet du om följden (x_n)?)

Lösning 4. Välj $x_n \in A_n$. Den resluterande följden måste ha en konvergerande delföljd x'_n eftersom rummet är kompakt. Låt $x'_n \to x$. Vi visar nu att x är i varje A_n. Anta att det finns ett $n \in \mathbb{N}$ för vilket $x \notin A_n$. Då följer att det finns ett index m' efter vilket $x'_j \notin A_n$ för alla $j > m'$. Men vi vet att $x_m \in A_m \subset A_n$ för varje $m > n$, alltså har vi en motsägelse. Påståendet följer.

Uppgift 5. Låt $f_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara avbildningen $x \mapsto x/3$ och $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avbildningen $x \mapsto 1 - x/3$. Definiera vidare $A_1 = [0, 1]$, och för $n > 1$ $A_{n+1} = f_v A_n \cup f_h A_n$. Låt $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. ($A$ kallas *Cantors mängd.*)

(a) Rita mängderna $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (så långt du kan).
(b) Visa att A är kompakt och icke-tom.

Lösning 5.

(a) För en bild sök på nätet.
(b) Märk att A_1 är kompakt. Vi visar nu att A_n är sluten med induktion. Fallet $n = 1$ är uppenbart. Anta att A_k är sluten. Då är $A_{k+1} = f_v[A_k] \cup f_h[A_k]$. Eftersom f_v, f_h är homeomorfismer följer att $f_v[A_k], f_h[A_k]$ är slutna, därmed är även A_{k+1} en sluten mängd. Alltså är alla A_n slutna.

    Nu visar vi att $A_n \subset A_1$ för varje n. Första fallet är trivialt. Anta nu att påståendet stämmer up till $n = k$. Då följer att $A_k \subset A_1$. Eftersom $f_v A_k \subset f_v A_1 \subset A_1$ och $f_h A_k \subset f_h A_1 \subset A_1$. Var den sista delmängds relationen i båda fallen inte är svår att försäkra sig om för hand.

    Det följer att snittet av alla A_n är en sluten delmängd av A_1 och måste därmed vara kompakt.

Uppgift 6. (Fullständighet vs. kompakthet) Vi vet att $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ är fullständigt. Visa att den slutna kulan $\bar{B}_{d_\infty}(0, 1)$ ändå inte är kompakt. (Tips: granska t.ex. följden av funktioner $f_n(x) = \max\{1 - |2nx - n|, 0\}$.)

Lösning 6. Anta att $n > m > 1$. Låt $x' = \frac{n+1}{2n}$. Då gäller

$$f_n(x') = 1 - |2nx' - n| = 1 - 1 = 0$$

och

$$f_m(x') = 1 - |2mx' - m| = 1 - |m\frac{n+1}{n} - m| = 1 - \frac{m}{n}.$$

Nu följer att

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\| &= \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\geq |f_n(x') - f_m(x')| \\ &= |0 - (1 - \frac{m}{n})| = 1 - \frac{m}{n} \\ &\geq 1 - \frac{m}{m+1} = \frac{1}{m+1}.\end{aligned}$$

Alltså gäller för varje m att varje $n > m$ uppfyller $\|f_n - f_m\| \geq \frac{1}{m+1}$. Alltså kan f_n inte ha någon konvergerande delföljd.