Topologi Ib
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper
Hösten 2018
Modellsvar till övning 7

Uppgift 1. Visa att om $\emptyset \neq A \subset X$ och A är kompakt så finns det sådana $a, b \in A$ att $d(a,b) = d(A)$. (Om du använder kompakthet av produktrummet, visa det först.)

Lösning 1. Vi börjar med att visa att mängden $A \times A$ är kompakt. Låt (a_n, b_n) vara en följd i $A \times A$. Då är a_n och b_n följder i A, med konvergerande delföljder a'_n och b'_n. Eftersom en följd konvergerar i produktrummet om och endast om den konvergerar komponentvis konvergerar alltså följden (a'_n, b'_n) i $A \times A$. Eftersom (a_n, b_n) var en godtycklig följd i $A \times A$ följer att $A \times A$ är kompakt.

Av infimums egenskaper följer att vi kan välja en följd par av punkter (a_n, b_n), för vilken $\lim d(a_n, b_n) = d(A)$. Eftersom detta är en följd i $A \times A$ följer att den har en konvergerande delföljd och därmed att det finns ett par punkter för vilket $d(a,b) = d(A)$. Påståendet följer.

Uppgift 2. Är följande mängder $A_i \subset \mathbb{R}^2$ (a) kompakta, (b) fullständiga:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \,:\, x^2 + 3y^2 \leq 4\}, \\ A_2 &= \{(x,y) \,:\, xy = 1\}, \\ A_3 &= \{(x,y) \,:\, x^2 + 3y^2 < 4\}. \end{aligned}$$

Lösning 2. Vi ser att A_1 och A_2 är slutna enligt urbildskriteriet. Däremot är A_3 inte sluten, för att se detta kan man tex. granska omgivningarna för punkten $(2,0)$.

Det är tydligt att A_1 och A_3 är begränsade. Däremot är inte A_2 begränsad, för att se detta kan man tex. granska följden $(n, \frac{1}{n})$.

(a) Endast A_1 är begränsad och sluten, alltså är A_1 den enda kompakta mängden av de tre.
(b) Fullständiga delmängder av fullständiga rum är precis de slutna delmängderna. Det följer att A_1 och A_2 är fullständiga men att A_3 inte är det.

Uppgift 3. Utgå från två metriska rum (X,d) och (Y,d'), varav X är kompakt. Betrakta de kontinuerliga funktionerna $f_n : X \to Y$ och antag att de konvergerar likformigt mot funktionen $f : X \to Y$. Vi antar att varje f_n uppnår värdet $y_0 \in Y$. Visa att också f får värdet y_0.

Lösning 3. Eftersom funktionerna är kontinuerliga och konvergerar likformigt följer att f är kontinuerlig. Låt x_n vara en följd för vilken $f_n(x_n) = y_0$. Eftersom X är kompakt, har (x_n) en konvergent delföljd (x_{k_n}), $x_{k_n} \to a$. Vi visar att $f(a) = y_0$. Om inte, så gäller

$\varepsilon = d'(f(a), y_0) > 0$. Eftersom f är kontinuerlig (i a), finns ett δ_0 så att $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon/2$ då $d(x, a) < \delta_0$. Vidare finns ett N så att $\sup_{x\in X} d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2$, då $n \geq N$. Låt nu $n \geq N$ vara ett index i delföljden (x_{n_k}) stort nog så att $d(x_n, a) < \delta_0$. Nu är $f_n(x_n) = y_0$ och eftersom $n \geq N$ så gäller $d'(f_n(x_n), f(x_n)) < \varepsilon/2$. Vidare har vi pga $d(x_n, a) < \delta_0$ att $d'(f(x_n), f(a)) < \varepsilon/2$. Således gäller

$$d'(f(a), y_0) \leq d'(f(a), f(x_n)) + d'(f(x_n), f_n(x_n)) + d'(f_n(x_n), y_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 + 0 = \varepsilon,$$

en motsägelse.

Uppgift 4. Antag att X är kompakt och (x_n) är en följd i X med exakt ett anhopningsvärde a. Visa att $x_n \to a$.

Lösning 4. Om $x_n \not\to a$ har a en omgivning U utanför vilken (x_n) har oändligt många värden. Nu kan vi bilda en delföljd till (x_n) av (numrerbart många av) dessa värden. Eftersom X är kompakt har denhär delföljden en konvergent delföljd, vars gränsvärde inte kan vara a men är ett anhopninsvärde av (x_n).

Uppgift 5. Antag att X är ett kompakt metriskt rum och (f_n) är en växande följd kontinuerliga funktioner $f_n : X \to \mathbb{R}$ som konvergerar punktvis mot den kontinuerliga funktionen $g : X \to \mathbb{R}$. Visa att konvergensen är likformig i X. Tips: Bilda för varje $\varepsilon > 0$ mängden $A_n = \{x \in X : f_n(x) \leq g(x) - \varepsilon\}$ och använd påminnelseuppgift 4 och uppgift 4 från förra veckan.

Lösning 5. Eftersom (f_n) är en växande följd som konvergerar punktvis mot g, måste $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq g(x)$ gälla för alla $n \in \mathbb{N}$ och $x \in X$. Således bildar för varje $\varepsilon > 0$ mängderna A_n en avtagande följ av slutna mängder i det kompakta rummet X.

Likformig konvergens av (f_n) är nu ekvivalent med att det för varje $\varepsilon > 0$, finns något $N \in \mathbb{N}$ för vilket $A_n = \emptyset$ för alla $n > N$. Om så inte är fallet har vi för varje $\varepsilon > 0$ en avtagande följd kompakta mänder, vars snitt inte kan vara tomt. Då finns för något $\varepsilon > 0$ $x \in \bigcap_n A_n$, vilket betyder att $|f_n(x) - g(x)| > \varepsilon$ för varje n, i motsats till antagandet att f_n konvergerar punktvis mot g.

Uppgift 6. Antag att X är ett sammanhängande metriskt rum, D en mängd och $f : X \to D$ en avbildning så att varje $x \in X$ har en omgivning i vilken f är konstant. Visa att f är konstant.

Lösning 6. Antag att det finns åtminstone två värden i värdemängden. Låt $x \in fD$, och $B = fD \setminus \{x\}$. Märk att urbilden av varje element $y \in fD$ är en öppen mängd, eftersom varje punkt i urbilden nödvändigtvis har en omgivning kring sig som avbildas till samma värde.

Då är $A_1 = f^{-1}\{x\} \mathrel{\text{⋐}} X$ och $A_2 = f^{-1}B = f^{-1}\bigcup\{\{y\} : y \in B\} = \bigcup\{f^{-1}\{y\} : y \in B\} \mathrel{\text{⋐}} X$ som en union av öppna mängder (utan några vidare antaganden om f). Vidare gäller $X = A_1 \cup A_2$ och $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Men då är X inte sammanhängande.