Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Kurssitentti, Ma 17.12.2018 (RATKAISUEHDOTUKSET)
Tentaattori: Ville Tengvall (ville.tengvall@helsinki.fi)

Vastaa kaikkiin kysymyksiin (kokeessa ei saa käyttää laskinta)

1. Tarkastellaan reaaliarvoista funktiota $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3 - x_1x_3\,.$$

(a) Määritä funktion f gradientti $\nabla f(x)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^3$. **(1p)**

(b) Määritä funktion f kriittiset pisteet koko avaruudessa $\mathbb{R}^3$. **(2p)**

(c) Määritä funktion f Hessen matriisi $\mathrm{Hes}_f(x)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^3$. **(1p)**

(d) Määritä kohdassa (b) löytämiesi kriittisten pisteiden laatu. **(2p)**

Ratkaisuehdotus.

(a)

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \partial_3 f(x)) = \big(8x_1 - 8x_2 - x_3, -8x_1 + 8x_2, 1 - x_1\big).$$

(b) Etsitään funktion f kriittiset pisteet (eli gradientin nollakohdat) joukossa $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\nabla f(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \big(8x_1 - 8x_2 - x_3, -8x_1 + 8x_2, 1 - x_1\big) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0).\end{aligned}$$

Eli funktion f ainoa kriittinen piste joukossa $\mathbb{R}^3$ on $x_0 = (1, 1, 0)$.

(c)

$$\mathrm{Hes}_f(x) = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \partial_1\partial_2 f(x) & \partial_1\partial_3 f(x) \\ \partial_2\partial_1 f(x) & \partial_2\partial_2 f(x) & \partial_2\partial_3 f(x) \\ \partial_3\partial_1 f(x) & \partial_3\partial_2 f(x) & \partial_3\partial_3 f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -1 \\ -8 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Määrätään kriittisen pisteen $x_0 = (1, 1, 0)$ laatu luennoilla esitellyn determinanttiehdon (lause 14.4) avulla. Koska

$$\begin{aligned}&\det(\mathrm{Hes}_f(x_0)) = 8 \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 1 \cdot 8 \cdot 1 = -8 \neq 0 \quad \text{ja} \\ &(-1)^1 \cdot \triangle_1(x_0; f) = -8 < 0,\end{aligned}$$

niin lauseen 14.4 nojalla x_0 on satulapiste.

□

2. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukkoa

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1,\ x_3 > 0\}\,.$$

(a) Osoita, että joukko S on avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä, kaksiulotteinen graafipinta.

) (b) Määritä pinnan S tangenttitaso $\mathcal{T}_a$ pisteessä $a = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

) (c) Määritä pinnan S normaalisuora $\mathcal{N}_a$ pisteessä $a = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(d) Hahmottele joukot S, $\mathcal{T}_a$ ja $\mathcal{N}_a$ kuvan avulla.

Ratkaisuehdotus.

(a) Määritellään jatkuvasti differentioituva funktio $g : B^2(0,1) \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$g(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Tällöin joukko $S = \mathcal{G}_g$ on sileä, kaksiulotteinen funktion g graafipinta, parametriesityksenään jatkuvasti differentioituva kuvaus $\varphi : B^2(0,1) \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(x) = \big(x_1, x_2, g(x_1, x_2)\big) = \Big(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\Big),$$

missä

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\big(D\varphi(x)\big) &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1(x) & \partial_2\varphi_1(x) \\ \partial_1\varphi_2(x) & \partial_2\varphi_2(x) \\ \partial_1\varphi_3(x) & \partial_2\varphi_3(x) \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \end{bmatrix} = 2\,.\end{aligned}$$

(b) Pinnan S pisteessä

$$a = \big(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big) = \varphi\big(\underbrace{0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{=:b}\big)$$

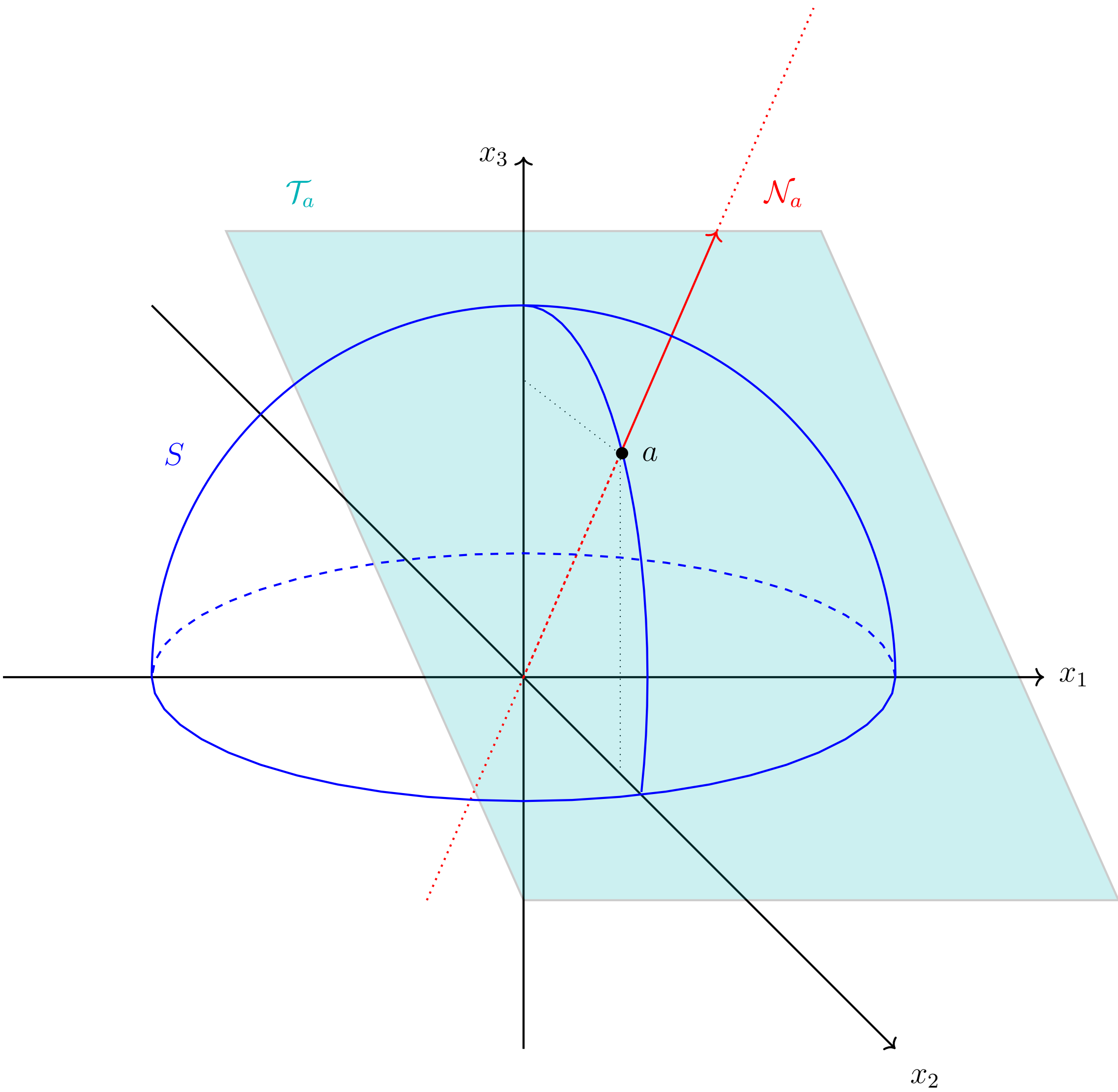
tangenttitasolle $\mathcal{T}_a$ saadaan esitys

$$\mathcal{T}_a = a + \operatorname{span}\big(\partial_1\varphi(b), \partial_2\varphi(b)\big) = \big(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big) + \operatorname{span}\big((1,0,0), (0,1,-1)\big).$$

(c) Kohdan (b) merkinnöin

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_a &= a + \operatorname{span}\big(\partial_1\varphi(b) \times \partial_2\varphi(b)\big) \\ &= \big(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big) + \operatorname{span}\begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \big(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big) + \operatorname{span}(0,1,1).\end{aligned}$$

(d)



□

3. Olkoot

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t-1, t)$$

ja

$$\eta : [0, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad \eta(t) = (t, 1-t^2)$$

polkuja.

(a) Määrittele polkujen γ ja η yhdistetty polku $\gamma \vee \eta$.

(b) Piirrä kuva polun $\gamma \vee \eta$ jäljestä.

(c) Laske funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = |x_1|$$

käyräintegraali polun $\gamma \vee \eta$ suhteen.

Ratkaisuehdotus.

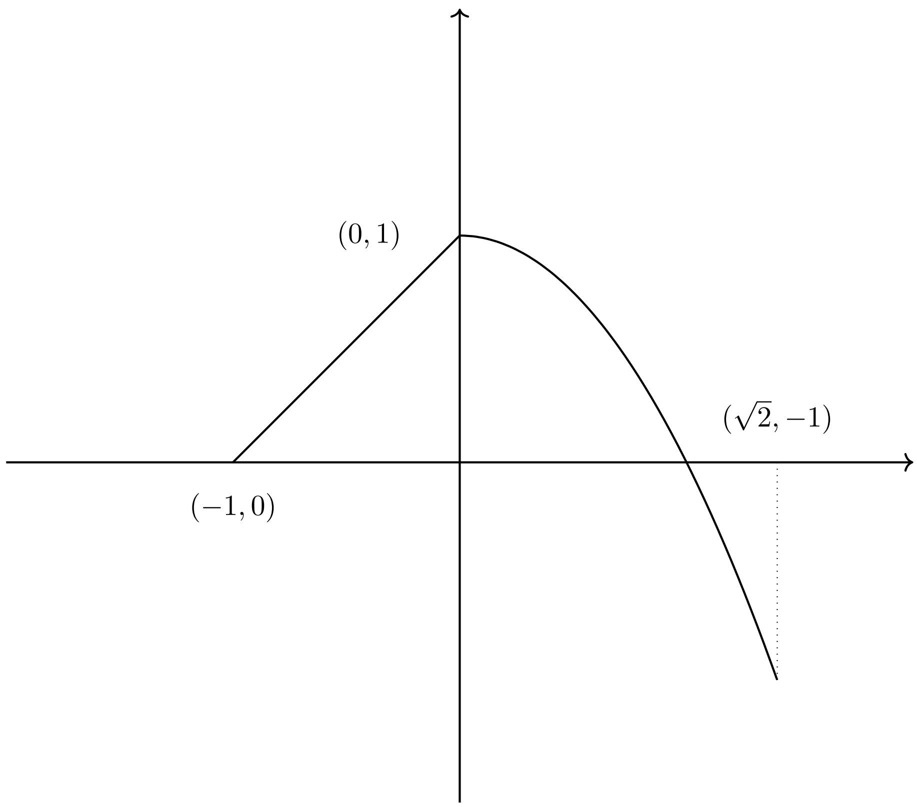
(a) Koska

$$\gamma(1) = (0,1) = \eta(0),$$

niin yhdistetty polku $\gamma \vee \eta$ voidaan muodostaa ja se on $\gamma \vee \eta : [0, 1+\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(\gamma \vee \eta)(t) &= \begin{cases} \gamma(t), & \text{kun } t \in [0,1] \\ \eta(t-1), & \text{kun } t \in [1, 1+\sqrt{2}] \end{cases} \\ &= \begin{cases} (t-1, t), & \text{kun } t \in [0,1] \\ \big(t-1, 2t-t^2\big), & \text{kun } t \in [1, 1+\sqrt{2}]. \end{cases}\end{aligned}$$

(b)



(c) Koska polut γ ja η ovat selvästi jatkuvasti derivoituvia ja lisäksi yhdistetyt funktiot

$$f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad (f \circ \gamma)(t) = |t-1|$$

ja

$$f \circ \eta : [0,\sqrt{2}] \to \mathbb{R}, \quad (f \circ \eta)(t) = |t|$$

ovat suljettujen välien jatkuvina funktioina Riemann-integroituvia, niin funktion f käyräintegraali polun $\gamma \vee \eta$ suhteen on määritelty. Suora lasku antaa

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\vee\eta} f\,ds &= \int_\gamma f\,ds + \int_\eta f\,ds \\
&= \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt + \int_0^{\sqrt{2}} f(\eta(t))\,\|\eta'(t)\|\,dt \\
&= \int_0^1 |t-1|\,\|(1,1)\|\,dt + \int_0^{\sqrt{2}} |t|\,\|(1,-2t)\|\,dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 1-t\,dt + \int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{1+4t^2}\,dt \\
&= \sqrt{2}\left(\Big|_0^1 t - \frac{1}{2}t^2\right) + \frac{2}{3\cdot 8}\left(\Big|_0^{\sqrt{2}} (1+4t^2)^{3/2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12}\big(9^{3/2}-1\big) = \cdots = \frac{3\sqrt{2}+13}{6}.
\end{aligned}$$

$\square$

4. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} \sin(x+y) + \cos u = 1 \\ \sin(y+u) + \cos v = 1. \end{cases}$$

(a) Osoita, että kyseisellä yhtälöparilla on pisteen $a = (0,0,0,0)$ ympäristössä muotoa

$$(x,y) = g(u,v)$$

oleva jatkuvasti differentioituva ratkaisu.

(b) Määritä (a)-kohdan kuvaukselle g lineaarikuvauksen $Dg(0,0)$ matriisi.

Ratkaisuehdotus.

(a) Määritellään jatkuvasti differentioituva kuvaus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$f(x,y,u,v) = \big(\sin(x+y) + \cos u - 1, \sin(y+u) + \cos v - 1\big).$$

Tällöin

$$Df(x,y,u,v) = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) & -\sin u & 0 \\ 0 & \cos(y+u) & \cos(y+u) & -\sin v \end{bmatrix},$$

ja erityisesti

$$\operatorname{mat}\big[Df(a)\big] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koska f on jatkuvasti differentioituva ja lisäksi matriisin

$$\operatorname{mat}\big[D_{x,y}f(a)\big] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aste on kaksi (sillä $\det D_{x,y}f(a) \neq 0$), niin implisiittifunktiolauseen nojalla annetulla yhtälöparilla on pisteen $a = (0,0,0,0)$ ympäristössä (täsmälleen yksi) muotoa

$$(x,y) = g(u,v)$$

oleva ratkaisu.

(b) Lineaarikuvauksen $Dg(0,0)$ matriisi voidaan ratkaista implisiittisellä derivoinnilla:

$$\begin{aligned} \operatorname{mat}\big[Dg(0,0)\big] &= -\operatorname{mat}\big[D_{x,y}f(a)\big]^{-1}\operatorname{mat}\big[D_{u,v}f(a)\big] \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$