Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Vektorianalyysi II (MAT21020)
Yleinen tentti, Ke 9.1.2019
Tentaattori: Ville Tengvall (ville.tengvall@helsinki.fi)

Koeaika on 2h 30min

Vastaa kaikkiin kysymyksiin (kokeessa ei saa käyttää laskinta)

1. Tarkastellaan reaaliarvoista funktiota $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2 + x_2x_3 - \tfrac{1}{2}x_3^2 .$$

(a) Määritä funktion f gradientti $\nabla f(x)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^3$. **(1p)**

(b) Määritä funktion f kriittiset pisteet koko avaruudessa $\mathbb{R}^3$. **(2p)**

(c) Määritä funktion f Hessen matriisi $\mathrm{Hes}_f(x)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^3$. **(1p)**

(d) Määritä kohdassa (b) löytämiesi kriittisten pisteiden laatu. **(2p)**

Ratkaisuehdotus.

(a)

$$\nabla f(x) = \big(-4x_1 + 4x_2, 4x_1 - 8x_2 + x_3, x_2 - x_3\big) .$$

(b) Määritetään funktion f kriittiset pisteet (eli gradientin nollakohdat) joukossa $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla f(x) = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 ,$$

joten funktion f ainoa kriittinen piste joukossa $\mathbb{R}^3$ on $x_0 := (0, 0, 0)$.

(c)

$$\mathrm{Hes}_f(x) = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \partial_1\partial_2 f(x) & \partial_1\partial_3 f(x) \\ \partial_2\partial_1 f(x) & \partial_2\partial_2 f(x) & \partial_2\partial_3 f(x) \\ \partial_3\partial_1 f(x) & \partial_3\partial_2 f(x) & \partial_3\partial_3 f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

(d) Määrätään kriittisen pisteen $x_0 = (1, 1, 0)$ laatu luennoilla esitellyn determinanttiehdon (lause 14.4) avulla. Koska

$$(-1)^1 \triangle_1(x_0; f) = 4 > 0 ,$$
$$(-1)^2 \triangle_2(x_0; f) = 4 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = 16 > 0$$
$$(-1)^3 \triangle_3(x_0; f) = -\big(-4 \cdot (8 - 1) - 4 \cdot (-4)\big) = 12 > 0 ,$$

niin lauseen 14.4 nojalla x_0 on lokaali aito maksimipiste.

$\square$

2. Tarkastellaan funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \|x\|^2,$$

määräämää tasa-arvojoukkoa

$$S := f^{-1}(9).$$

(a) Osoita, että S on avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä, kaksiulotteinen pinta.

(b) Määritä pinnan S tangenttitaso $\mathcal{T}_b$ pisteessä $b = (2, 1, 2)$.

(c) Määritä pinnan S normaalisuora $\mathcal{N}_b$ pisteessä $b = (2, 1, 2)$.

(d) Hahmottele joukot S, $\mathcal{T}_b$ ja $\mathcal{N}_b$ kuvan avulla.

Ratkaisuehdotus.

(a) Koska $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti differentioituva kuvaus, jolle

$$\nabla f(x) = 2x \neq 0 \quad \text{kaikilla } x \in S = f^{-1}(9)\ ,$$

niin S on avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä, $3 - 1 = 2$ -ulotteinen tasa-arvopinta.

(b) Pisteessä $b = (2, 1, 2) \in S$ pätee

$$\nabla f(b) = (4, 2, 4),$$

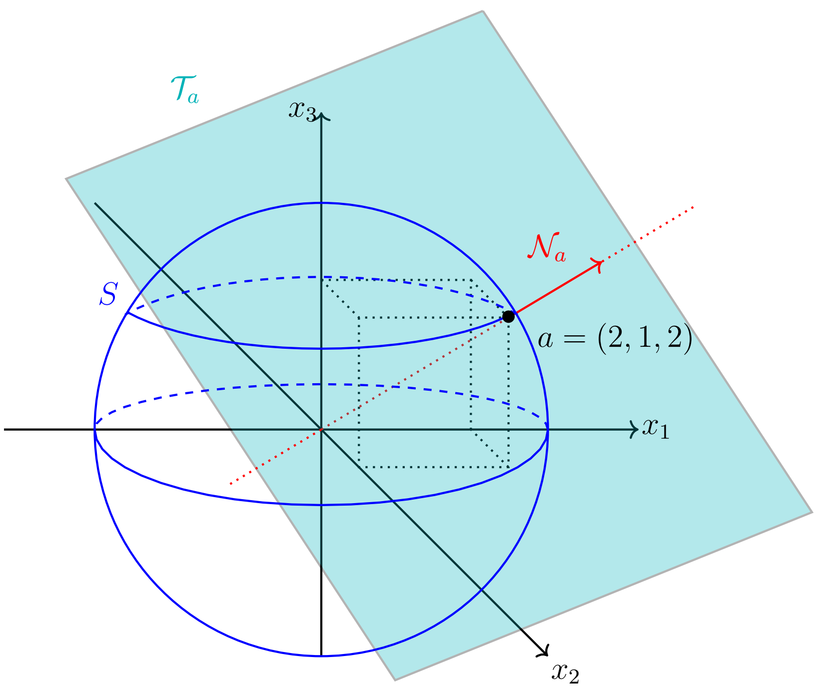
jolloin saadaan, että

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_b &= \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : \big(\nabla f(b) \,|\, x - b\big) = 0\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : \big((4, 2, 4) \,|\, (x_1 - 2, x_2 - 1, x_3 - 2)\big) = 0\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18\Big\}\,. \end{aligned}$$

(c) Vastaavasti

$$\mathcal{N}_b = b + \operatorname{span}\big(\nabla f(b)\big) = (2, 1, 2) + \operatorname{span}(4, 2, 4)\,.$$

(d)



$\square$

3. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} xyu + yuv = 0 \\ xy + yu + uv = 2. \end{cases}$$

(a) Osoita, että kyseisellä yhtälöparilla on pisteen

$$z_0 := (x_0, y_0, u_0, v_0) = (-2, 0, 2, 1)$$

ympäristössä täsmälleen yksi muotoa

$$(y, u) = g(x, v)$$

oleva jatkuvasti differentioituva ratkaisu. **(4p)**

(b) Määritä (a)-kohdan kuvaukselle g lineaarikuvauksen $Dg(-2, 1)$ matriisi. **(2p)**

Ratkaisuehdotus.

(a) Määritellään jatkuvasti differentioituva kuvaus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$f(x, y, u, v) = (xyu + yuv, xy + yu + uv - 2)\,.$$

Tällöin

$$f(-2, 0, 2, 1) = (0, 0)$$

ja

$$Df(x, y, u, v) = \begin{bmatrix} yu & xu + uv & xy + yv & yu \\ y & x + u & y + v & u \end{bmatrix},$$

ja erityisesti

$$\mathrm{mat}\big[Df(z_0)\big] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Koska f on jatkuvasti differentioituva ja lisäksi matriisin

$$\mathrm{mat}\big[D_{y,u}f(z_0)\big] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aste on kaksi (sillä $\det D_{y,u}f(a) \neq 0$), niin implisiittifunktiolauseen nojalla annetulla yhtälöparilla on pisteen z_0 ympäristössä täsmälleen yksi muotoa

$$(y, u) = g(x, v)$$

oleva jatkuvasti differentioituva ratkaisu.

(b) Lineaarikuvauksen $Dg(-2, 1)$ matriisi voidaan ratkaista implisiittisellä derivoinnilla:

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}\big[Dg(-2, 1)\big] &= -\,\mathrm{mat}\big[D_{y,u}f(z_0)\big]^{-1}\,\mathrm{mat}\big[D_{x,v}f(z_0)\big] \\ &= -\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

4. Tarkastellaan joukkoa

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = R,\ x_3 > r\}\,,$$

missä $0 < r < R$.

(a) Osoita, että joukko $\mathcal{C}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä, kaksiulotteinen graafipinta.

(b) Laske joukon $\mathcal{C}$ pinta-ala (eli pintamitta).

Ratkaisuehdotus.

(a) Määritellään jatkuvasti differentioituva funktio $g : B^2(0, \sqrt{R^2 - r^2}) \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$g(x_1, x_2) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}\,.$$

Tällöin joukko $S = \mathcal{G}_g$ on sileä, kaksiulotteinen funktion g graafipinta, parametriesityksenään jatkuvasti differentioituva kuvaus

$$\varphi : B^2(0, \sqrt{R^2 - r^2}) \to \mathbb{R}^3,$$

jonka lauseke on

$$\varphi(x) = \big(x_1, x_2, g(x_1, x_2)\big) = \Big(x_1, x_2, \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}\Big),$$

missä

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\big(D\varphi(x)\big) &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1(x) & \partial_2\varphi_1(x) \\ \partial_1\varphi_2(x) & \partial_2\varphi_2(x) \\ \partial_1\varphi_3(x) & \partial_2\varphi_3(x) \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} \end{bmatrix} = 2\,.\end{aligned}$$

(b) Lasketaan aluksi (a)-kohdassa määritellyn paprametriesityksen φ suurennussuhde:

$$\begin{aligned}\|\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x)\| &= \left\| \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & -\frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} \end{vmatrix} \right\| \\ &= \left\| \Big(\frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}, 1 \Big) \right\| = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}\,.\end{aligned}$$

Siispä joukon $\mathcal{C}$ pinta-alaksi saadaan Fubinin lausetta ja napakoordinaattimuunnosta käyttämällä

$$\begin{aligned}A(\mathcal{C}) &= \int_{B^2(0,\sqrt{R^2-r^2})} \|\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x)\|\, dx = R \int_{B^2(0,\sqrt{R^2-r^2})} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} \\ &= R \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \frac{t}{\sqrt{R^2 - t^2}}\, dt = \lim_{s \to 0} \Big(2\pi R \int_s^{\sqrt{R^2-r^2}} \frac{t}{\sqrt{R^2 - t^2}}\, dt \Big) \\ &= \lim_{s \to 0} \Big(2\pi R \Big(\Big|_s^{\sqrt{R^2-r^2}} - \sqrt{R^2 - t^2} \Big) \Big) = 2\pi R(R - r)\,.\end{aligned}$$

□